Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 7: (F08T1A1) Wir betrachten die Differentialgleichung

$$x' = 1 + x^2 \sin(t - x) \tag{1}$$

a) Die Lösungen $x_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$ von (1) zu den Anfangsbedingungen $x_k(k\pi) = 0$ lassen sich einfach angeben. Bestimmen Sie diese Lösungen.

b) Für $k \in \mathbb{Z}$ sei

$$T_k := \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : k\pi < t - x < (k+1)\pi\}.$$

Man zeige: Liegt ein Punkt des Graphen $G_x := \{(t, x(t)) : t \in I\}$ einer Lösung $x : I \to \mathbb{R}$ von (1) in T_k, so ist $G_x \subseteq T_k$.

c) Zeigen Sie: Alle maximalen Lösungen von (1) sind auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

Aufgabe 8: (F09T1A4)
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Der topologische Abschluß M der Menge $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}$ sei kompakt. Man zeige:

a) Eine Lösung des Anfangswertproblems $x' = f(x), x(0) = x_0$ verläuft für jeden Punkt $x_0 \in M$ vollständig in M.

b) Das Anfangswertproblem $x' = f(x), x(0) = x_0$ ist für jeden Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ global lösbar.

Aufgabe 9: (H14T1A4) Für welche $x_0 \in \mathbb{R}$ ist das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = \sqrt[3]{x^2}, \quad x(0) = x_0$$

lokal eindeutig lösbar? Für welche $x_0 \in \mathbb{R}$ ist es global eindeutig lösbar?