

Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 37: (F14T2A4) Es sei $f : \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{C}$.
$$z \mapsto \frac{z^2}{z^2-1}$$

a) Bestimmen Sie für jede der Singularitäten von f den Typ und berechnen Sie das Residuum.

b) Zeigen Sie, daß für $U := \{z \in \mathbb{C} : |z| > 2\}$ die Einschränkung $f_U : U \rightarrow \mathbb{C}$
$$z \mapsto \frac{z^2}{z^2-1}$$

eine holomorphe Stammfunktion besitzt.

Aufgabe 38: (H06T1A5)

a) Eine meromorphe Funktion f sei in der Form $f(z) = \frac{h(z)}{(z-z_0)^2}$ mit holomorphem h und $h(z_0) \neq 0$ gegeben. Wie berechnet man das Residuum von f in z_0 ?

b) Geben Sie für $f(z) = \frac{1}{(4+z^2)^2}$ alle isolierten Singularitäten in \mathbb{C} an samt ihrem Typ und bei Polen auch ihre Ordnung.

c) Berechnen Sie das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$.

Aufgabe 39: (F11T2A1) Geben Sie jeweils alle holomorphen Funktionen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit den angegebenen Eigenschaften an und begründen Sie jeweils, daß es über die von Ihnen angegebenen Funktionen hinaus keine weiteren mit diesen Eigenschaften gibt.

a) $f'(z) = zf(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und $f(0) = 1$.

b) $f(f(z)) = z$ für alle $z \in \mathbb{C}$, $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$.