Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 34: (H17T1A2)

a) Bestimmen Sie die Ordnung der Nullstelle $z_0 = 0$ der Funktion

$$f(z) := 6\sin(z^3) + z^3(z^6 - 6).$$

b) Sei $b > 0$. Zeigen Sie, daß gilt:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos(2bx)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-b^2}.$$

Sie dürfen ohne Beweis benutzen, daß $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$ ist.

Hinweis: Betrachten Sie für $R > 0$ das Kurvenintegral $\int\limits_{\gamma_R} e^{-x^2}dx$, wobei γ_R der Rand des Rechtecks mit den Eckpunkten $\pm R + 0i$ und $\pm R + ib$ ist.

Aufgabe 35: (H17T3A2)
Betrachten Sie die Sinus-Cardinalis-Funktion $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ für $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

a) Zeigen Sie, daß f zu einer ganzen Funktion fortgestezt werden kann.

b) Zeigen Sie, daß die fortgesetzte Funktion über $\mathbb{R}$ uneigentlich Riemann-integrierbar, aber nicht absolut integrierbar ist.

Aufgabe 36: (H17T3A5) Sei $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k \end{array}$ holomorph.

a) Stellen Sie für $k \in \mathbb{N}_0$ und $r > 0$ die Koeffizienten a_k der obigen Potenzreihe durch ein Wegintegral über $\{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ dar. Folgern Sie daraus

$$|a_k| \le r^{-k}\max\{|f(z)| : |z| = r\}$$

b) Für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte zusätzlich $\limsup\limits_{|z|\to\infty} |z|^{-n}|f(z)| < \infty$. Zeigen Sie, daß f ein Polynom vom Grad $\le n$ ist.

c) Für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte nun zusätzlich $\liminf\limits_{|z|\to\infty} |z|^{-n}|f(z)| > 0$. Zeigen Sie, daß f ein Polynom vom Grad $\ge n$ ist.