Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 31: (F14T1A3)
Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\ddot{x} = -\cos(x)$$

a) Wandeln Sie diese Differentialgleichung zweiter Ordnung um in ein äquivalentes System erster Ordnung mit den Variablen x und y um.

b) Hat diese Differentialgleichung für jede Anfangsbedingung eine eindeutige maximale Lösung?

c) Sind die maximalen Lösungen auf ganz $\mathbb{R}$ definiert?

d) Man zeige, daß die Funktion $S(x, y) = 2\sin(x) + y^2$ ein erstes Integral ist.

Aufgabe 32: (H17T1A3)
Gegeben sei das ebene autonome System

$$\begin{aligned} x' &= x^2y + 3y =: f(x, y) \\ y' &= -xy^2 - 3x =: g(x, y). \end{aligned}$$

Man zeige:

a) Der Nullpunkt ist die einzige Ruhelage des Systems.

b) Das System ist ein Hamiltonsches System, dh. es existiert eine stetig differenzierbare Funktion $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\dfrac{\partial H}{\partial x} = -g$ und $\dfrac{\partial H}{\partial y} = f$.

c) H ist konstant auf den Lösungen des Systems, dh. für jede Lösung φ gilt $H \circ \varphi$ ist konstant.

d) Jede Lösung φ ist beschränkt.

e) Jede maximale (dh. nicht fortsetzbare) Lösung φ ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

f) Die Nullösung ist stabil, aber nicht attraktiv.

Aufgabe 33: (F04T2A5) Gegeben sei das autonome System

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x + 2x^3 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

a) Bestimmen und klassifizieren Sie alle Gleichgewichtspunkte von (1).

b) Skizzieren Sie die Trajektorien für das zugeordnete lineare System.

c) Zeigen Sie, daß unter den Trajektorien aus (b) nur diejenige für $t \to \infty$ gegen $(0, 0)$ strebt, für die immer $y = -x$ gilt.

d) Bestimmen Sie die Trajektorien des Systems (1).