

Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 28: (F04T1A5)

Untersuchen Sie, ob der Gleichgewichtspunkt $(0, 0)$ des autonomen Systems

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\sin(x) \cos(y) + y(1 - 2e^y) \\ \dot{y} &= x \cos(x) - e^x \sin(y)\end{aligned}$$

asymptotisch stabil ist.

Aufgabe 29: (F11T2A5)

Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x + 2e^{2t}y \\ \dot{y} &= -2y\end{aligned}$$

- Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems.
- Geben Sie alle Ruhelagen des Systems an und untersuchen Sie diese auf Attraktivität.

Aufgabe 30: (H08T2A2) Seien σ, r und b positive Konstanten. Die Lorenz-Gleichungen lauten:

$$\begin{aligned}x' &= \sigma(y - x) \\ y' &= rx - y - xz \\ z' &= xy - bz\end{aligned}$$

- Zeigen Sie, daß der Nullpunkt für $r > 1$ ein instabiler Gleichgewichtspunkt ist.
- Zeigen Sie sowohl durch Linearisierung als auch unter Verwendung der Lyapunov-Funktion $V(x, y, z) := x^2 + \sigma y^2 + \sigma z^2$, daß der Nullpunkt für $0 < r < 1$ ein asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt ist.