

Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 1: (H13T3A1)

Gegeben sei die parameterabhängige Differentialgleichung

$$\dot{x} = x^\alpha, \quad x(0) = 1.$$

Bestimmen Sie die maximalen Lösungen dieser Differentialgleichung für $\alpha = 1$ und $\alpha = 2$.

Aufgabe 2: (H08T1A4)

Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme und geben Sie jeweils den maximalen Definitionsbereich der Lösung an:

a) $y' = \frac{y^2 - t^2}{2ty}, \quad y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

b) $y' - \frac{t}{t^2 - 1}y = \sqrt{t^2 - 1}, \quad y(\sqrt{2}) = \sqrt{2}.$

Aufgabe 3: (H13T2A4) Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$y' = t^2 \sqrt{1 + 2y}$$

- a) Geben Sie die Lösung der zugehörigen Anfangswertaufgabe mit Anfangswert $y(0) = 0$ auf dem Intervall $[0, \infty[$ an. Warum ist sie dort eindeutig?
- b) Betrachten Sie die Differentialgleichung zum Anfangswert $y(0) = -\frac{1}{2}$. Geben Sie zwei verschiedene Lösungen dieser Anfangswertaufgabe explizit an.