Übungen zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 28: (F10T2A3)

Sei $f_n : \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ definiert durch $f_n(z) := \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{z+k}$. Zeigen Sie, daß durch $f(z) := \lim_{n\to\infty} f_n(z)$ eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ definiert wird.

Aufgabe 29: (F10T3A5) Für die Funktion $f(z) = \frac{2}{z(z^2+1)}$ bestimme man die Laurentreihen in den Bereichen

$$
\begin{aligned}
A_1 &:= \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < \tfrac{1}{2}\} \\
A_2 &:= \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-i| < 1\} \\
A_3 &:= \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z-i| < 3\}
\end{aligned}
$$

und berechne längs $\begin{array}{rcl} \alpha : [0,2\pi] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \frac{1}{2}e^{it} \end{array}$ und $\begin{array}{rcl} \beta : [0,2\pi] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & 4e^{4it} \end{array}$ die Wegintegrale $\int_\alpha f(z)dz$ und $\int_\beta f(z)dz$.

Aufgabe 30: (F14T1A4)

Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine Funktion, die bei Annäherung an ∂G gegen ∞ strebt, dh. für jede Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in G mit $z_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} z \in \partial G$ gilt $|f(z_n)| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. Zeigen Sie, daß f nicht holomorph ist, indem Sie die folgenden Fälle unterscheiden:

(i) f hat keine Nullstelle in G.

(ii) f hat endlich viele Nullstellen in G.

(iii) f hat unendlich viele Nullstellen in G.

Aufgabe 31: (H04T1A3)

Eine komplexe Funktion f sei gegeben durch

$$f(z) = \frac{1+i}{z^2 - z - iz + i}$$

a) Finden Sie den Definitionsbereich und die Partialbruchentwicklung von f.

b) Entwickeln Sie f in $\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ in eine Taylorreihe um 0 und in $\mathbb{C}\backslash\overline{\mathbb{E}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ in eine Laurentreihe um 0.

c) Für welche geschlossenen Wege Γ in $\mathbb{C}$ gilt $\int_\Gamma f(z)dz = 0$?

Aufgabe 32: (F03T3A2)

a) Sei $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $|f(z)| \leq 1 + \frac{1}{|z|^2}$ für alle $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Zeigen Sie, daß f dann die Form $f(z) = a + \frac{b}{z} + \frac{c}{z^2}$ für $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ mit geeigneten Konstanten $a, b, c \in \mathbb{C}$ hat.

b) Es seien $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ und $g : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ holomorph, wobei g in 0 einen Pol der Ordnung $k > 0$ habe. Es gelte $f(\frac{1}{n}) = g(\frac{1}{n})$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, daß dann $f = g$ ist oder f in 0 eine wesentliche Singularität hat.

Aufgabe 33: (F04T3A1) Es sei $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ holomorph und erfülle

$$f(\frac{1}{n}) = (-1)^n \frac{1}{n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

a) Beweisen Sie, daß f in 0 weder eine hebbare Singularität noch eine Polstelle haben kann.

b) Geben Sie konkret eine in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ holomorphe Funktion mit dieser Eigenschaft an.

Aufgabe 34: (H02T1A2)
Man berechne mit Hilfe des Residuensatzes

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(x)}{5 - 4\cos(2x)} dx$$

Aufgabe 35: (F12T1A1) Berechnen Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1 + x^2} dx$$

und erläutern Sie dabei Ihre Rechenschritte.

Aufgabe 36: (H07T1A1) Es sei a eine reelle Zahl mit $a > 1$. Zeigen Sie, daß die Gleichung

$$ze^{a-z} = 1$$

im Einheitskreis $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ genau eine Lösung z_0 hat, und daß diese reell ist mit $0 < z_0 < 1$.

Aufgabe 37: (F07T3A3)
Sei $G = \mathbb{C}\backslash\{iy : y \in [0, \infty[$ die geschlitzte Ebene und $\mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ der offene Einheitskreis.

a) Begründen Sie, daß es eine konforme Abbildung $f : G \to \mathbb{E}$ gibt.

b) Geben Sie explizit eine solche Abbildung an.

Aufgabe 38: (H13T3A5)
Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und sei $z_0 \in G$. Ist die Menge

$$\{f'(z_0) : f : G \to G \text{ holomorph}, f(z_0) = z_0\}$$

beschränkt? Unterscheiden Sie dabei die Fälle $G = \mathbb{C}$ und $G \neq \mathbb{C}$.