

## Übungen zum Staatsexamen: Analysis

**Aufgabe 17:** (F08T3A5)

Gegeben sei das autonome System

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + x^2 + y^2 \\ bx - y + xy \end{pmatrix}$$

mit  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $a \leq 0$ .

- a) Man zeige, daß im Fall  $a < 0$  die Nullage asymptotisch stabil ist.
- b) Man beweise oder widerlege, daß die Behauptung in a) auch im Fall  $a = 0$  gilt.

**Aufgabe 18:** (H03T3A4) Erstellen Sie für das System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= |x| \end{aligned}$$

das Phasenportrait und bestimmen Sie explizite Darstellungen aller Lösungen, die für  $t \rightarrow \infty$  oder  $t \rightarrow -\infty$  gegen  $(0, 0)$  konvergieren. Erklären Sie ferner, warum jedes zu diesem System gehörige Anfangswertproblem eindeutig lösbar ist.

**Aufgabe 19:** (F09T2A1)

Gegeben sei folgendes Differentialgleichungssystem

$$x' = -y + x \sin(x^2 + y^2) \tag{1}$$

$$y' = x + y \sin(x^2 + y^2) \tag{2}$$

- a) Bestimmen Sie alle periodischen Orbits.
- b) Skizzieren Sie das Phasenportrait.

Hinweis: Man transformiere auf Polarkoordinaten. Zunächst bestimme man eine Differentialgleichung für  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

**Aufgabe 20:** (H06T3A4)

Gegeben sei das parameterabhängige, 2-dimensionale Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = f_\alpha(x, y) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - (1 - x^2 - y^2) \begin{pmatrix} \alpha x \\ y^3 \end{pmatrix} \tag{3}$$

mit  $\alpha \in ]-1, 1[$ .

- a) Zeigen Sie, daß der Ursprung  $(0, 0)$  die einzige Ruhelage von (3) in  $K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$  ist und untersuchen Sie diese für  $\alpha \neq 0$  auf Stabilität.
- b) Zeigen Sie für  $\alpha = 0$  mit Hilfe der Funktion  $H(x, y) := x^2 + y^2$  die Stabilität der Ruhelage  $(0, 0)$ .

**Aufgabe 21:** (F01T1A5) Betrachten Sie das Differentialgleichungssystem

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\sin(x_1) \end{cases}$$

- Bestimmen Sie alle Fixpunkte und die Linearisierungen um diese.
- Welche Fixpunkte sind bezüglich ihrer Linearisierung stabil?
- Welche Fixpunkte sind stabil? Hinweis: Konstruieren Sie ein Integral zum Nachweis der Stabilität.

**Aufgabe 22:** (H10T3A1) Sei  $f$  eine in einer Umgebung von  $\overline{D_2} := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2\}$  definierte holomorphe Funktion mit  $|f(z)| \leq 1$  für alle  $z \in \overline{D_2}$ . Zeigen Sie: Für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| \leq 1$  gilt:  $|f''(z)| \leq 4$ .

Hinweis: Cauchy-Integralformel

**Aufgabe 23:** (H10T2A2)

Es sei  $\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  die offene Einheitskreisscheibe und  $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktion für die  $|f(0)| < 1$  und  $|f(z)| \leq 1$  für alle  $z \in \mathbb{E}$  gilt. Man zeige, daß dann sogar  $|f(z)| < 1$  für alle  $z \in \mathbb{E}$  gelten muß.

**Aufgabe 24:** (F06T2A3) Bestimmen Sie alle holomorphen Funktionen  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , die  $f(e^{\sqrt{2}\pi i n}) = 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  erfüllen.

**Aufgabe 25:** (F13T1A1)

- Bestimmen Sie explizit alle ganzen Funktionen  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $|f(z) - 3| \geq 1$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ .
- Gibt es eine holomorphe Funktion  $f$  auf einer Umgebung der 0, so daß  $f^{(n)}(0) = n^{2n}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt?

**Aufgabe 26:** (H07T2A2)

- Formulieren Sie den Satz von Liouville und beweisen Sie ihn mit Hilfe der Koeffizientenabschätzung von Cauchy.
- Sei  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und sei  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  mit  $(a, b) \neq (0, 0)$ . Zeigen Sie: Ist die Funktion  $a \operatorname{Re} f + b \operatorname{Im} f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  nach oben beschränkt, so ist  $f$  konstant.

**Aufgabe 27:** (F09T3A4)

Es sei  $\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  der offene Einheitskreis um 0 in  $\mathbb{C}$ .

- Gibt es eine holomorphe Funktion  $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $f(z)^3 = z^2$  für alle  $z \in \mathbb{E}$ ?
- Gibt es eine holomorphe Funktion  $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $f(\frac{1}{n}) = \frac{(-1)^n}{n^4}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 2$ ?
- Gibt es eine holomorphe Funktion  $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$f(0) = 2i, \quad \lim_{|z| \rightarrow 1} |f(z)| = 1?$$