Übungen zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 9: (F05T2A1)
Für welche $p \in]0,\infty[$ besitzt das Anfangswertproblem

$$x' = x^p,\ x(0) = 1 \tag{1}$$

eine eindeutige Lösung, dessen maximales Lösungsintervall

a) $[0,\infty[$

b) $]-\infty,0]$

enthält?

Aufgabe 10: (F11T3A2) Sei $D := \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : t^2{+}x^2 < 1\}$ und $\begin{array}{rcl} f : D & \to & \mathbb{R} \\ (t,x) & \mapsto & \sqrt{1-t^2-x^2} \end{array}$.

Zeigen Sie:

a) Das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = f(t,x), \quad x(0) = 0$$

hat eine eindeutig bestimmte maximale Lösung $\varphi :]a,b[\to \mathbb{R}$ mit $-\infty < a < 0 < b < \infty$.

b) Die Grenzwerte $\varphi(a) := \lim\limits_{t \nearrow a} \varphi(t)$ und $\varphi(b) := \lim\limits_{t \searrow b} \varphi(t)$ exitieren in $\mathbb{R}$.

c) Es gilt $-a = b$, $b^2 + (\varphi(b))^2 = 1$ und $\dfrac{1}{\sqrt{2}} < b < 1$.

Aufgabe 11: (H17T3A3)
Für $u_0 \in \mathbb{R}$ betrachte man für $t \geq 0$ das Anfangswertproblem

$$u'(t) = u(t) + \frac{1}{1+t}, \quad u(0) = 0.$$

Zeigen Sie:

a) Für jedes u_0 existiert eine eindeutige Lösung auf ganz $\mathbb{R}^+$.

b) $\lim\limits_{t\to\infty} u(t) = \infty$ für jedes $u_0 \geq 0$.

c) Es existiert ein $u_0 < 0$, so daß $\lim\limits_{t\to\infty} u(t) = -\infty$.

d) Es existiert ein $\alpha < 0$ so daß $\lim\limits_{t\to\infty} u(t) = \infty$ für jedes $u_0 > \alpha$, $\lim\limits_{t\to\infty} u(t) = -\infty$ für jedes $u_0 < \alpha$ und $\lim\limits_{t\to\infty} u(t) \in \mathbb{R}$ für $u_0 = \alpha$.

Aufgabe 12: (H09T1A3)
Für jedes $E \in \mathbb{C}$ betrachten Sie die Differentialgleichung

$$H'' - 2zH' + (E-1)H = 0$$

für eine Funktion H, die analytisch in der Variablen z ist.

a) Bestimmen Sie die Lösungen der Form $H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n z^n$. Zeigen Sie, daß die Koeffizienten eine Rekursionsrelation erfüllen, die Sie angeben sollen.

b) Berechnen Sie den Konvergenzradius der Reihe.

c) Geben Sie die geraden Lösungen an.

d) Für welche Werte von E ist die Lösung von (c) ein Polynom?

Aufgabe 13: (H04T2A4) Sei $\varepsilon > 0$ und $w : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion mit $\|w(x)\| \leq \frac{1}{2}\|x\|$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\| < \varepsilon$, wobei $\|x\| = \|(x_1, ..., x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$ bezeichne. Es sei weiter $\lambda : [0, \infty[\to \mathbb{R}^n$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = -x + w(x).$$

Schätzen Sie $\frac{d}{dt}\|\lambda(t)\|^2$ ab und folgern Sie aus Ihrem Ergebnis, daß aus $\|\lambda(0)\| < \varepsilon$ stets $\|\lambda(t)\| < \varepsilon$ für alle $t > 0$ sowie $\lambda(t) \xrightarrow{t\to\infty} 0$ folgt.

Aufgabe 14: (H14T1A5) Gegeben sei das autonome zweidimensionale Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y\exp(1 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} &= -x\exp(1 - x^2 - y^2) \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, daß dieses System zu jedem Anfangswert genau eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung besitzt.

b) Zeigen Sie, daß die Orbits der Lösungen in konzentrischen Kreislinien (einschließlich Radius 0) um den Ursprung enthalten sind.

c) Zeigen Sie, daß jede nichtkonstante maximale Lösung periodisch ist, und bestimmen Sie die Periodenlänge.

Aufgabe 15: (H13T3A2)
Gegeben sei das lineare Differentialgleichungssystem $\dot{x} = A_a x$ mit der reellen $3\times3-$Matrix

$$A_a = \begin{pmatrix} -1 & a & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$$

wobei $a \in \mathbb{R}$ ein Parameter ist. Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, für die es eine nichttriviale Lösung $x(t)$ gibt mit $\lim_{t\to\infty} \|x(t)\| = 0$.

Aufgabe 16: (F11T1A2) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Differentialgleichung

$$y'' + 3y' = e^{4t}$$