Übungen zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 1: (H11T3A5)

Sei $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $\gamma = \sup\limits_{t\geq 0} \int\limits_0^t p(s)ds \in \mathbb{R}$.

a) Berechnen Sie für $x_0 \in \mathbb{R}$ die Lösungen $x(t)$ des Anfangswertproblems

$$x'(t) = p(t)e^{x(t)}, \quad x(0) = x_0$$

für $t > 0$.

b) Beweisen Sie: Ist $1 > \gamma e^{x_0}$, so existiert die Lösung in (a) für alle Zeiten $t > 0$.

Aufgabe 2: (H13T1A5)
Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$xyy' = x^2 + y^2, \quad y(1) = 1$$

auf dem ersten Quadranten $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0\}$. Geben Sie auch den maximalen Definitionsbereich der Lösung an.

Aufgabe 3: (F05T1A1)

a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$u'' = -4u + 4u' \tag{1}$$

b) Gegeben sei die Differentialgleichung

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = 0 \qquad \text{für } x > 0. \tag{2}$$

Durch die Substitution $x = e^t$ und $y(e^t) = u(t)$ (wegen $x > 0$) geht die obige Differentialgleichung in eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten für $u(t)$ über. Wie lautet diese? Geben Sie die allgemeine Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung (2) an.

Aufgabe 4: (H17T1A4) Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$x' = \frac{x^2}{1 + t^2}, \quad x(0) = c,$$

wobei $c > 0$ ein positiver Parameter ist.

a) Man zeige: Ist I ein offenes Intervall mit $0 \in I$ und ist $\varphi : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung des gegebenen Anfangswertproblems, so hat φ keine Nullstelle.

b) Man finde ein offenes Intervall I mit $0 \in I$ und eine Lösung $\varphi_c : I \to \mathbb{R}$.

c) Man setze φ_c zu einer maximalen Lösung $\widetilde{\varphi}_c :]t^-(c), t^+(c)[\to \mathbb{R}$ fort. Wie lauten die Entweichzeiten $t^-(c)$ und $t^+(c)$ und wie verhält sich $\widetilde{\varphi}_c(t)$ für $t \to t^+(c)$ und $t \to t^+(c)$?

Aufgabe 5: (F15T1A4) Bestimmen Sie eine reelle Lösung $y : I \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems

$$y(x)y'(x) + y(x)^2 + 2x + 5 = 0, \quad y(-4) = -2.$$

Wie groß kann das Intervall I maximal gewählt werden?
Hinweis: Eine Möglichkeit der Lösung besteht darin, zunächst einen integrierenden Faktor $u : \mathbb{R} \to]0, \infty[$ zu bestimmen, welcher nur von der Variablen x abhängt. Wir bezeichnen hierbei u als integrierenden Faktor, wenn die Differentialgleichung nach Multiplikation mit u exakt wird.

Aufgabe 6: (H03T2A4)
Berechnen Sie die maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = \frac{1}{\sin(t+y)} - 1, \quad y(0) = \frac{\pi}{4}.$$

Aufgabe 7: (H06T2A3)
Es seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g :]a, b[\to \mathbb{R}$ zwei $C^\infty-$Funktionen; wir betrachten die Differentialgleichung mit getrennten Variablen

$$\dot{x} = f(t)g(x).$$

Sei x_0 eine Zahl zwischen zwei Nullstellen von g, dh. $x_1 < x_0 < x_2$ und $g(x_1) = g(x_2) = 0$. Folgt aus diesen Angaben bereits, daß die maximale Lösung von

$$\dot{x} = f(t)g(x), \quad x(0) = x_0$$

auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist? Beweisen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 8: (F12T1A5)
Für $\xi \in \mathbb{R}$ sei das Anfangswertproblem

$$x' = \arctan(x), \qquad x(0) = \xi \tag{3}$$

gegeben. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Das Anfangswertproblem (3) besitzt genau eine maximale Lösung $\lambda_\xi : I_\xi \to \mathbb{R}$.

b) λ_ξ besitzt genau dann eine Nullstelle, wenn $\xi = 0$ ist.

c) Für alle $t \in I_\xi$ gilt:

$$\xi - \frac{\pi}{2}|t| \leq \lambda_\xi(t) \leq \xi + \frac{\pi}{2}|t|.$$

d) $I_\xi = \mathbb{R}$.