Übungsblatt 9 zu Mathematik I für Physiker

Aufgabe 33: (10 Punkte)
Zeige: Ist $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $[0,\infty[$, so sind äquivalent:

a) $\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

b) $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{1+x_k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Aufgabe 34: (10 Punkte)
Untersuche, ob die Reihen

a) $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

b) $\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $x_k := \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{falls } k = 2m+1 \\ -\frac{1}{k^2} & \text{falls } k = 2m \end{cases}$.

c) $\left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^k(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})\right)_{n\in\mathbb{N}}$

konvergieren.

Aufgabe 35: (10 Punkte)
Zeige, daß die Reihe $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und bestimme den Grenzwert.

Aufgabe 36: (10 Punkte)
Zu $b\in\mathbb{N}$, $b\geq 2$ betrachte die Menge

$$\mathbb{H}_b := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : \ a_n \in \{0,1,...,b-1\} \text{ und es gibt kein } N\in\mathbb{N}, \text{ sodass } a_n = b-1 \text{ für alle } n \geq N\}.$$

a) Zeige: Die Abbildung

$$\begin{aligned} f \quad &: \mathbb{H}_b \longrightarrow [0,1[\\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} &\longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b^n} \end{aligned}$$

ist bijektiv.

b) Es seien $a,b\in\mathbb{R}$ mit $a<b$. Zeige, daß das reelle Intervall $]a,b[\subseteq\mathbb{R}$ überabzählbar ist.

Abgabe je Zweier-/Dreiergruppe eine Lösung bis Donnerstag 11.1.2018, 10.15 Uhr – im Übungskasten vor der Bibiliothek , Theresienstraße 1. Stock oder in der Vorlesung. Markieren Sie einen Nachnamen zum Sortieren bei der Rückgabe.