

Übungsblatt 7 zu Mathematik I für Physiker

Aufgabe 25: (10 Punkte)

Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X .

- a) Zeige: Sind die Teilfolgen $(x_{3n})_{n \in \mathbb{N}}$ und $(x_{7n})_{n \in \mathbb{N}}$ beide konvergent, so konvergieren sie gegen denselben Grenzwert.
- b) Zeige: Sind die Teilfolgen $(x_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$, $(x_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ und $(x_{7n})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent, dann konvergiert auch $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- c) Gib ein Beispiel einer Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ an, so daß für jedes $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ die Teilfolgen $(x_{kn})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergieren, aber $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht konvergiert.

Aufgabe 26: (10 Punkte)

Es sei $\emptyset \neq X$ eine Menge und

$$B(X) := \{f : X \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ ist Funktion und } f(X) \subseteq \mathbb{R} \text{ ist beschränkt}\}$$

- a) Zeige, daß

$$\begin{aligned} d : B(X) \times B(X) &\rightarrow [0, \infty[\\ (f, g) &\mapsto d(f, g) := \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in X\} \end{aligned}$$

eine Metrik auf $B(X)$ definiert.

- b) Betrachte nun den Spezialfall $X = [0, 1]$ und für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Zeige: Für $x \mapsto x^n$ jedes $x \in [0, 1]$ konvergiert die reelle Folge $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$, aber $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert nicht in $(B([0, 1]), d)$.

Aufgabe 27: (10 Punkte)

- a) Zu vorgegebenen $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ definiere rekursiv die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch

$$a_n := \frac{1}{7}(5a_{n-1} + 2a_{n-2})$$

für $n \geq 3$. Zeige, daß die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert und bestimme den Grenzwert.

- b) Beginnend mit $b_1 := 1$ definiere die Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch

$$b_{n+1} := \sqrt{2b_n + 3}$$

für $n \geq 1$. Zeige, daß die Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert und bestimme den Grenzwert.

Aufgabe 28: (10 Punkte)

Untersuche die Folgen auf Konvergenz und berechne gegebenenfalls den Grenzwert für:

$$\text{a) } a_n := \frac{(-1)^n n^3 - n^2 + 10}{n^3 + 1}.$$

$$\text{b) } b_n := \frac{4n^3 + 2n^2 - 1}{n^3 + 5n - 7}$$

$$\text{c) } c_n := n \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{(2n)!}}$$

$$\text{d) } d_n := \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$$

Abgabe je Zweier-/Dreiergruppe eine Lösung bis Donnerstag 7.12.2017, 10.15 Uhr – im Übungskasten vor der Bibliothek, Theresienstraße 1. Stock oder in der Vorlesung. Markieren Sie einen Nachnamen zum Sortieren bei der Rückgabe.