Übungsblatt 5 zu Mathematik I für Physiker

Wir betrachten

$$\mathbb{Q}[X] := \left\{ p = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k : n \in \mathbb{N}_0, a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{Q} \right\},$$

wobei Elemente $p = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{Q}[X]$ und $q = \sum_{l=0}^{m} b_l X^l \in \mathbb{Q}[X]$ genau dann gleich sind, wenn $m = n$ und $a_0 = b_0, a_1 = b_1, ..., a_n = b_n$ sind.

Aufgabe 17: (10 Punkte)

a) Zeige, daß

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \right) \oplus \left(\sum_{l=0}^{m} b_l X^l \right) := \sum_{j=0}^{\max\{m,n\}} (a_j + b_j) X^j$$

(wobei $a_{n+1} = ... = a_m = 0$ für $n < m$ bzw. $b_{m+1} = ... = b_n = 0$ für $m < n$ verwendet wird) und

$$\lambda \bullet \left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \right) := \left(\sum_{k=0}^{n} (\lambda a_k) X^k \right)$$

zwei Abbildungen $\oplus : \mathbb{Q}[X] \times \mathbb{Q}[X] \to \mathbb{Q}[X]$ und $\bullet : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}[X] \to \mathbb{Q}[X]$ definieren, die $(\mathbb{Q}[X], \oplus, \bullet)$ zu einem $\mathbb{Q}-$Vektorraum machen.

b) Entscheide, welche der folgenden Mengen Untervektorräume von $\mathbb{Q}[X]$ sind:

$$U_1 := \left\{ \sum_{k=0}^{11} a_k X^k : a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{Q}_+ \right\}, U_2 := \{a_0 + a_2 X^2 : a_0, a_2 \in \mathbb{Q}\}$$

c) Bestimme

$$\operatorname{lin}\left(\{nX^{2n} : n \in \mathbb{N}\}\right) \cap \operatorname{lin}\left(\{X^{3n} : n \in \mathbb{N}\}\right)$$

Aufgabe 18: (10 Punkte)

a) Zeige, daß

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \right) * \left(\sum_{l=0}^{m} b_l X^l \right) := \sum_{j=0}^{n+m} \left(\sum_{\substack{k=0,1,\ldots,n \\ l=0,1,\ldots,m, k+l=j}} a_k b_l \right) X^j$$

eine Abbildung $* : \mathbb{Q}[X] \times \mathbb{Q}[X] \to \mathbb{Q}[X]$ definiert, die $(\mathbb{Q}[X], \oplus, *)$ zu einem kommutativen Ring mit Eins macht.

b) Zeige am Beispiel $p = 1 + X$ die Kürzungsregel $q_1 * p = q_2 * p \Rightarrow q_1 = q_2$ in $\mathbb{Q}[X]$.

Aufgabe 19: (10 Punkte)

a) Zeige: Für $(p_1, q_1), (p_2, q_2) \in \mathbb{Q}[X] \times (\mathbb{Q}[X] \backslash \{0\})$ wird durch

$$(p_1, q_1) \sim (p_2, q_2) :\Leftrightarrow p_1 * q_2 = q_1 * p_2$$

eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Q}[X] \times (\mathbb{Q}[X] \backslash \{0\})$ definiert.

b) Schreibe $\frac{p}{q} := [(p,q)]_\sim$ für die Äquivalenzklasse von $(p,q) \in \mathbb{Q}[X] \times (\mathbb{Q}[X]\backslash\{0\})$ in $K := \mathbb{Q}[X] \times (\mathbb{Q}[X]\backslash\{0\})/\sim$. Zeige: Durch

$$\frac{p}{q} + \frac{r}{s} := \frac{p * s \oplus r * q}{q * s} \quad \text{und} \quad \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} := \frac{p * r}{q * s}$$

werden zwei Abbildungen $+ : K \times K \to K$ und $\cdot : K \times K \to K$ definiert, die $(K, +, \cdot)$ zu einem Körper machen

Aufgabe 20: (10 Punkte) Sei

$$\begin{aligned} K_+ &:= \left\{ \frac{p}{q} \in K : p = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k, q = \sum_{l=0}^{m} b_l X^l \in \mathbb{Q}[X]; a_n \neq 0, b_m \neq 0, a_n b_m \in \mathbb{Q}_+ \right\} \\ K_- &:= \left\{ \frac{p}{q} \in K : p = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k, q = \sum_{l=0}^{m} b_l X^l \in \mathbb{Q}[X]; a_n \neq 0, b_m \neq 0, a_n b_m \in \mathbb{Q}_- \right\} \end{aligned}$$

a) Zeige: K_+, K_- und $\{0\}$ bilden eine Zerlegung von K und durch

$$r \leq s :\Leftrightarrow s - r := s + (-r) \in K_+ \cup \{0\}$$

wird eine totale Ordnung $\leq$ auf K definiert, die $(K, +, \cdot, \leq)$ zu einem geordneten Körper macht.

b) Zeige: $(K, \leq)$ ist kein archimedisch geordneter Körper.

Abgabe je Zweier-/Dreiergruppe eine Lösung bis Donnerstag 23.11.2017, 10.15 Uhr – im Übungskasten vor der Bibiliothek , Theresienstraße 1. Stock oder in der Vorlesung. Vermerken Sie auf jeder Lösung rechts oben <u>eine</u> Tutoriumsgruppe zur Rückgabe.