# Übungsblatt 4 zu Mathematik I für Physiker

**Aufgabe 13: (10 Punkte)**
Seien $m$ und $n$ teilerfremde natürliche Zahlen und zu $a \in \mathbb{Z}$ sei $[a]_m = \{a + km : k \in \mathbb{Z}\}$ die Äquivalenzklasse [1] von $a$ in $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Es sei $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ das direkte Produkt [2] der Gruppen $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, [+]_m)$ und $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, [+]_n)$ und

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{Z}/(mn\mathbb{Z}) &\to (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}), \\ [a]_{mn} &\mapsto ([a]_m, [a]_n) \end{aligned}$$

a) Zeige, daß dies eine Funktion definiert, also insbesondere unabhängig von der Wahl der Repräsentanten ist.

b) Zeige, daß $\varphi$ ein Homomorphismus von Gruppen ist.

c) Zeige, daß $\varphi$ bijektiv ist.

**Aufgabe 14: (10 Punkte)**
Für eine Gruppe $G$ sei

$$\mathrm{Aut}(G) := \{\psi : G \to G : \psi \text{ bijektiver Gruppenhomomorphismus}\}$$

Zeige: $\mathrm{Aut}(G)$ bildet zusammen mit der Komposition von Abbildungen eine Gruppe $(\mathrm{Aut}(G), \circ)$.

**Aufgabe 15: (10 Punkte)**
Es seien $(G, *_G)$ und $(H, *_H)$ Gruppen und ein Gruppenhomomorphismus

$$\begin{aligned} \psi : H &\longrightarrow \mathrm{Aut}(G) \\ h &\longmapsto (\phi_h : G \to G) \end{aligned}$$

gegeben. Zeige: Mit der Verknüpfung

$$\begin{aligned} * : (G \times H) \times (G \times H) &\to G \times H \\ ((g_1, h_1), (g_2, h_2)) &\mapsto (g_1 *_G \phi_{h_1}(g_2), h_1 *_H h_2) \end{aligned}$$

wird $(G \times H, *)$ eine Gruppe – das **semidirekte Produkt**.

**Aufgabe 16: (10 Punkte)**
Gegeben seien die Permutationsgruppe $\mathcal{S}_n = \{\sigma : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\} : \sigma \text{ ist bijektiv}\}$ und [3] die Gruppe $(\mathbb{R}^n, +)$.

a) Zeige: $\sigma \in \mathcal{S}_n$ definiert bijektiven Gruppenhomomorphismus $\begin{aligned} \phi_\sigma : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, ..., x_n) &\longmapsto (x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(n)}). \end{aligned}$

b) Zeige: $\begin{aligned} \psi : \mathcal{S}_n &\longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n) \\ \sigma &\longmapsto \phi_\sigma. \end{aligned}$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

c) Wie sieht die Verknüpfung des semidirekten Produkts $(\mathbb{R}^n \times \mathcal{S}_n, *)$ zusammen mit den obigen Gruppenhomomorphismen konkret aus?

**Abgabe je Zweier-/Dreiergruppe eine Lösung bis Donnerstag 16.11.2017, 10.15 Uhr – im Übungskasten vor der Bibiliothek , Theresienstraße 1. Stock oder in der Vorlesung. Vermerken Sie auf jeder Lösung rechts oben <u>eine</u> Tutoriumsgruppe zur Rückgabe.**

---

[1] also bzgl. der Äquivalenzrelation $a \sim_m b$ genau dann wenn es $k \in \mathbb{Z}$ mit $a - b = km$ gibt (vgl. Tutorium)

[2] für $[a_1]_m, [a_2]_m \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ und $[b_1]_n, [b_2]_n \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist

$$([a_1]_m, [b_1]_n) + ([a_2]_m, [b_2]_n) := ([a_1]_m[+]_m[a_2]_m, [b_1]_n[+]_n[b_2]_n)$$

[3] wie man Elemente aus dem $\mathbb{R}^n$ addiert, darf in dieser Aufgabe als bekannt vorausgesetzt werden