Übungsblatt 3 zu Mathematik I für Physiker

Aufgabe 9: (10 Punkte) Zeige:

a) Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{n+k}{k} = \binom{n+m+1}{n+1}.$$

b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist

$$1 + 2^{(2^n)} + 2^{(2^{n+1})}$$

durch 7 teilbar.

Aufgabe 10: (10 Punkte)
Es sei $N : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\backslash\{1\}$ die in den Peano-Axiomen beschriebene injektive Funktion. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ sei $\varphi_m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die nach dem Rekursionssatz durch $\varphi_m(1) = m + 1 = N(m)$ und $\varphi_m \circ N = N \circ \varphi_m$ bestimmte Funktion. Zeige:

a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $\varphi_1(n) = n + 1 = N(n)$.

b) Für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt $\varphi_m \circ N = \varphi_{m+1}$.

c) Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt $\varphi_m(n) = \varphi_n(m)$.

Aufgabe 11: (10 Punkte)
Es sei $\emptyset \neq X$ eine abzählbare Menge. Zeige, daß

$$\mathcal{E}(X) := \{Y \subseteq X : Y \text{ ist endlich}\}$$

eine abzählbare Menge ist. Was gilt darüberhinaus im Fall einer endlichen Menge X?

Aufgabe 12: (10 Punkte)
Es sei X eine unendliche Menge. Zeige:

a) Es gibt eine abzählbar unendliche Menge $Z \subseteq X$.

b) Ist $Y \subseteq X$ eine unendliche Menge, so daß $X\backslash Y$ abzählbar ist, dann sind X und Y gleichmächtig.

Abgabe je Zweier-/Dreiergruppe eine Lösung bis Donnerstag 9.11.2017, 10.15 Uhr – im Übungskasten vor der Bibiliothek , Theresienstraße 1. Stock oder in der Vorlesung. Vermerken Sie auf jeder Lösung rechts oben <u>eine</u> Tutoriumsgruppe zur Rückgabe.