Übungsblatt 2 zu Mathematik I für Physiker

Aufgabe 5: (10 Punkte)
Es sei $X \neq \emptyset$ eine Menge und $Y \subseteq X$. Zeige:

a) Für $V, W \in \mathcal{P}(X)$ wird durch $V \sim W$ genau dann, wenn $V \cap Y = W \cap Y$ ist, eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{P}(X)$ definiert.

b) Zeige, daß $\begin{array}{rcl} f : \mathcal{P}(Y) & \to & \mathcal{P}(X)/_\sim \\ V & \mapsto & [V]_\sim \end{array}$ ein bijektive Funktion von $\mathcal{P}(Y)$ auf die Menge $\mathcal{P}(X)/_\sim$ aller Restklassen bzgl. $\sim$ definiert.

Aufgabe 6: (15 Punkte)
Es $(X, \leq)$ und $(Y, \preceq)$ geordnete Mengen.

a) Es sei $I \neq \emptyset$ und für jedes $i \in I$ sei $A_i \subseteq X$ gegeben, so daß $\sup(A_i) \in X$ existiert. Zeige, daß $\sup\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)$ genau dann existiert, wenn $\sup\{\sup(A_j) : j \in I\}$ existiert. In diesem Fall gilt

$$\sup\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sup\{\sup(A_j) : j \in I\}$$

b) Es sei $(X, \leq)$ totalgeordnet und $f : X \to Y$ eine streng monoton steigende, bijektive Funktion. Zeige: Für jedes $A \subseteq X$ gilt,

$$f(\sup(A)) = \sup(f(A))$$

falls eine der beiden Seiten existiert.

Aufgabe 7: (10 Punkte)
Für $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ wird $n!$ rekursiv definiert durch: $0! := 1$, $1! := 1$ und $(n+1)! := (n+1) \cdot (n!)$ für $n \in \mathbb{N}$. Für $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \{0, 1, ..., n\}$ definiere

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Zeige:

a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

b) Für $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \{1, ..., n\}$ gilt:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

c) Sind $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Aufgabe 8: (15 Punkte) Zeige:

a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$$

c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $5 \cdot 2^{3n-2} + 3^{3n-1}$ ohne Rest durch 19 teilbar.

Abgabe je Zweier-/Dreiergruppe eine Lösung bis Donnerstag 2.11.2017, 10.15 Uhr – im Übungskasten vor der Bibiliothek , Theresienstraße 1. Stock oder in der Vorlesung. Vermerken Sie auf jeder Lösung rechts oben <u>eine</u> Tutoriumsgruppe zur Rückgabe. Vergessen Sie bitte nicht sich über den Link auf der Tutoriumsseite http://www.mathematik.uni-muenchen.de/∼zenk/ws1718/ für eine Tutoriumsgruppe anzumelden.