Ferienblatt zu Mathematik I für Physiker

Aufgabe 49: (20 Punkte) Berechne den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen.

a) $\left(\sum_{n=1}^{N}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n} z^{n!}\right)_{N\in\mathbb{N}}$.

b) $\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{n!}{a^{n^2}}z^{n}\right)_{N\in\mathbb{N}}$ für $a>1$.

c) $\left(\sum_{n=1}^{N}(1+\frac{1}{n})^{n^2}z^{n}\right)_{N\in\mathbb{N}}$.

d) $\left(\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n}\left[\frac{2^{n}(n!)^{2}}{(2n+1)!}\right]^{p}z^{n}\right)_{N\in\mathbb{N}}$ in Abhängigkeit von $p\in\mathbb{N}$.

e) $\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{a^{n}+b^{n}}z^{n}\right)_{N\in\mathbb{N}}$ für $0\leq a<b$.

Aufgabe 50: (20 Punkte)
Schreibe $\frac{1}{1-z-z^{2}}$ als Potenzreihe

a) zum Entwicklungspunkt 0

b) zum Entwicklungspunkt $-\frac{1}{2}$

c) zum Entwicklungspunkt 1

und bestimme deren Konvergenzradien.

Aufgabe 51: (15 Punkte) Es sei $\mathcal{F}(\mathbb{C}) := \{f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{C} : f \text{ ist eine Abbildung}\}$ die Menge aller komplexen Folgen. Zeige, daß

$$d(f,g):=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|f(n)-g(n)|}{2^{n}(1+|f(n)-g(n)|)}$$

eine Metrik auf $\mathcal{F}(\mathbb{C})$ definiert. Zeige weiterhin, daß eine Folge $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{F}(\mathbb{C})$ genau dann bezüglich d gegen $g\in\mathcal{F}(\mathbb{C})$ konvergiert, wenn für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt: $\lim_{m\to\infty} f_m(n)=g(n)$.

Aufgabe 52: (10 Punkte) Es sei V ein $K-$Vektorraum und $P:V\to V$ sei $K-$linear und erfülle $P\circ P=P$. Zeige $V=\mathrm{Kern}(P)\oplus P(V)$.

Aufgabe 53: (10 Punkte) Es sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $H\subseteq V$ ein Untervektorraum mit $\dim_K H=n-1$. Zeige: Es gibt eine K-lineare Abbildung $f:V\longrightarrow K$ mit $\mathrm{Kern} f=H$. Gilt diese Aussage auch für $1\leq\dim_K H\leq n-2$?

Aufgabe 54: (10 Punkte)
Es sei V ein K-Vektorraum mit $\dim_K(V)=n$ und $U\subseteq V$ ein Untervektorraum mit $\dim_K(U)=m<n$. Für welche m gibt es eine K-lineare Abbildung $f_m:V\longrightarrow K^2$ mit $\mathrm{Kern}(f_m)=U$. Gib in allen möglichen Fällen ein derartiges f_m an!

Aufgabe 55: (10 Punkte) Es sei $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung, deren darstellende Matrix bezüglich der Standardbasis gegeben ist durch $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -6 \\ 3 & 5 & -3 \\ -6 & -3 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

a) Zeige, daß $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Bestimme die darstellende Matrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ von f bezüglich der Basis $\mathcal{B}$.

Aufgabe 56: (15 Punkte)

Es sei K ein Körper. Die Spur einer Matrix $A := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(K)$ ist definiert durch

$$\mathrm{Spur}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Zeige, daß für $A, B \in M_n(K)$ gilt:

a) $\mathrm{Spur}(A + B) = \mathrm{Spur}(A) + \mathrm{Spur}(B)$.

b) $\mathrm{Spur}(AB) = \mathrm{Spur}(BA)$.

c) Im Allgemeinen gilt nicht $\mathrm{Spur}(AB) = \mathrm{Spur}(A)\mathrm{Spur}(B)$.

Aufgabe 57: (10 Punkte)
Es sei V ein n-dimensionaler $K-$Vektorraum und $F : V \to V$ sei $K-$linear. Zeige, dass die Spur der darstellenden Matrix von F unabhngig von der Wahl der Basis von V ist, dh

$$\mathrm{Spur}(M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(F)) = \mathrm{Spur}(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F))$$

gilt für jede Basis $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ von V.

Abgabe je Zweier-/Dreiergruppe eine Lösung bis Dienstag 10.4.2018, 8.15 Uhr – im Übungskasten vor der Bibiliothek (das ist Nummer 19), Theresienstraße 1. Stock oder in der Vorlesung.