

## Übungsblatt 12 zu Mathematik I für Physiker

**Aufgabe 45: (10 Punkte)** Es sei  $x > 0$ .

- a) Zeige:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(\frac{x}{n})}{\frac{x}{n}} = 1$ .
- b) Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  sei  $L_n$  die Länge des Streckenzuges, der die Punkte  $1, e^{i\frac{x}{n}}, e^{i\frac{2x}{n}}, \dots, e^{i\frac{(n-1)x}{n}}$  und  $e^{ix}$  in dieser Reihenfolge miteinander verbindet. Zeige:  $L_n = 2n \left| \sin\left(\frac{x}{2n}\right) \right|$ .
- c) Was folgt daraus für  $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n$ ?

**Aufgabe 46: (10 Punkte)**

Es sei  $V := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ ist Funktion}\}$ . Betrachte für  $k \in \mathbb{Z}$  die Funktion

$$f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus [k, k+1] \\ 4(x-k) & \text{für } x \in [k, k+\frac{1}{4}] \\ 1 & \text{für } x \in ]k+\frac{1}{4}, k+\frac{3}{4}[ \\ 4(k+1-x) & \text{für } x \in [k+\frac{3}{4}, k+1] \end{cases}$$

Zeige:  $\{f_k : k \in \mathbb{Z}\} \subseteq V$  ist linear unabhängig und  $\text{lin}(\{f_k : k \in \mathbb{Z}\}) \neq V$ .

**Aufgabe 47: (10 Punkte)**

- a) Untersuche, ob  $\begin{pmatrix} i \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3i \\ 4-i \\ -1+i \end{pmatrix}$  in  $\mathbb{C}^3$  linear unabhängig sind.
- b) Untersuche, ob  $\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -i \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  in  $\mathbb{C}^3$  linear unabhängig sind.
- c) Bestimme eine Basis für

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 : (1-i)z_1 + (1+i)z_2 + z_3 = 0 \right\}.$$

**Aufgabe 48: (10 Punkte)**

Zeige, daß im  $\mathbb{C}$ -Vektorraum  $V := \{f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ ist eine Funktion}\}$  die Mengen

- a)  $W_1 = \left\{ \begin{array}{l} f_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto e^{nz} \quad : n \in \mathbb{Z} \end{array} \right\}$
- b)  $W_2 = \left\{ \begin{array}{l} g_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto \sin(nz) \quad : n \in \mathbb{N} \end{array} \right\}$
- c)  $W_3 = \left\{ \begin{array}{l} h_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto \cos(nz) \quad : n \in \mathbb{N} \end{array} \right\}$

linear unabhängig sind.

**Abgabe je Zweier-/Dreiergruppe eine Lösung bis Donnerstag 1.2.2018, 10.15 Uhr – im Übungskasten vor der Bibliothek, Theresienstraße 1. Stock oder in der Vorlesung. Markieren Sie einen Nachnamen zum Sortieren bei der Rückgabe.**