# Übungsblatt 11 zu Mathematik I für Physiker

**Aufgabe 41: (10 Punkte)**

a) Bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihe $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{k^k} z^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Zeige, daß sich die Funktionen $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{C}\backslash\{i,-i\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{1}{z^2+1} \end{array}$, $\begin{array}{rcl} g:\mathbb{C}\backslash\{1,i\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{1}{(z-1)(z-i)} \end{array}$

und $\begin{array}{rcl} h:\mathbb{C}\backslash\{1,i\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{1}{(z-1)(z-i)^2} \end{array}$ auf einer Kreisscheibe $K(0,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ mit $r > 0$ als Grenzwert von absolut konvergenten Potenzreihen mit Entwicklungspunkt 0 schreiben lassen und bestimme den Konvergenzradius dieser Potenzreihen.

**Aufgabe 42: (10 Punkte)**
Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein $\mathbb{C}-$Banachraum, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $X$ und $a \in \mathbb{C}$.

a) Es sei

$$0 < \underline{\lim}_{n\to\infty} \|c_n\| \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} \|c_n\| < \infty.$$

Bestimme in diesem Fall den Konvergenzradius der Potenzreihe $\left(\sum_{n=0}^{N} c_n(z-a)^n\right)_{N\in\mathbb{N}_0}$.

b) Zeige: Hat $\left(\sum_{n=0}^{N} c_n(z-a)^n\right)_{N\in\mathbb{N}_0}$ den Konvergenzradius $\rho > 0$, dann hat auch die Potenzreihe $\left(\sum_{n=0}^{N} (n+1)c_{n+1}(z-a)^n\right)_{N\in\mathbb{N}_0}$ den Konvergenzradius $\rho$.

**Aufgabe 43: (10 Punkte)**
Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein $\mathbb{C}-$Banachraum, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $X$ und $a \in \mathbb{C}$, so daß die Potenzreihe $\left(\sum_{n=0}^{N} c_n(z-a)^n\right)_{N\in\mathbb{N}_0}$ einen Konvergenzradius $\rho > 0$ besitzt und es sei

$$\begin{array}{rcl} f:\{z\in\mathbb{C}:|z-a|<\rho\} & \to & X \\ z & \mapsto & \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \end{array}$$

Ferner sei $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-a| < \rho\}$ mit $a = \lim_{m\to\infty} y_m$ und $f(y_m) = \mathbf{0}$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Zeige: $c_n = \mathbf{0}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

**Aufgabe 44: (10 Punkte)**
Es sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ mit Grenzwert $a := \lim_{n\to\infty} z_n$. Zeige, daß die Folgen $(e^{z_n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(\sin(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\cos(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren und daß

$$e^a = \lim_{n\to\infty} e^{z_n}, \quad \sin(a) = \lim_{n\to\infty} \sin(z_n) \quad \text{und} \quad \cos(a) = \lim_{n\to\infty} \cos(z_n)$$

gilt.

**Abgabe je Zweier-/Dreiergruppe eine Lösung bis Donnerstag 25.1.2018, 10.15 Uhr – im Übungskasten vor der Bibiliothek , Theresienstraße 1. Stock oder in der Vorlesung. Markieren Sie einen Nachnamen zum Sortieren bei der Rückgabe.**