Übungsblatt 6 zu Mathematik I für Naturwissenschaftler

Aufgabe 21: (10 Punkte)
Welche der folgenden Paare von Vektoren sind im $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig; welche bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

a) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

Aufgabe 22: (10 Punkte)
Es sei $V := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ ist eine Funktion}\}$ der $\mathbb{R}-$Vektorraum aller reellwertigen Funktionen auf $\mathbb{R}$ und für $k \in \mathbb{N}_0$ sei $\begin{array}{rcl} X^k : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^k \end{array} \in V$ (mit $x^0 := 1$). Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$\mathcal{P}_{n-1} := \{a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1X + a_0 : a_{n-1}, ..., a_1, a_0 \in \mathbb{R}\} \subseteq V.$$

Ferner seien $(x_1, f_1), ..., (x_n, f_n) \in \mathbb{R}^2$ mit paarweise verschiedenen $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ gegeben.

a) Zeige: $\mathcal{B} = (1, X, ..., X^{n-1})$ bildet eine Basis von $\mathcal{P}_{n-1}$.

b) Für $1 \le i \le n$ definiere $L_i \in \mathcal{P}_{n-1}$ durch

$$L_i(x) := \prod_{\substack{j=1,\\ i\neq j}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{x - x_1}{x_i - x_1} \cdots \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \cdot \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \cdots \frac{x - x_n}{x_i - x_n}.$$

Berechne $L_i(x_j)$ für alle möglichen Wahlen von $i, j \in \{1, ..., n\}$ und zeige, daß $\big(L_1, ..., L_n\big)$ eine Basis von $\mathcal{P}_{n-1}$ bildet.

Aufgabe 23: (10 Punkte)
Mit den Bezeichnungen aus Aufgabe 22 zeige:

a) $p(x) := \sum_{i=1}^{n} f_i L_i(x)$ definiert das eindeutige $p \in \mathcal{P}_{n-1}$, so daß $p(x_1) = f_1, ..., p(x_n) = f_n$ ist – das sog. **Interpolationspolynom** zu den Punkten $(x_1, f_1), ..., (x_n, f_n) \in \mathbb{R}^2$.

b) Es seien nun $n = 4$ und $(x_1, f_1) = (1, 0)$, $(x_2, f_2) = (-1, 4)$, $(x_3, f_3) = (2, 19)$, $(x_4, f_4) = (0, 1)$ gegeben. Berechne das Interpolationspolynom zu diesen Punkten.

Aufgabe 24: (10 Punkte) Es sei $\mathcal{P}_n$ und X^k wie in Aufgabe 22. Entscheide, ob die folgenden Funktionen $\mathbb{R}-$linear sind oder nicht:

a) $$\begin{array}{rcl} F : \mathcal{P}_n & \to & \mathcal{P}_{n-1} \\ \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k & \mapsto & \sum\limits_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} \end{array}$$

b) $$\begin{array}{rcl} G : \mathcal{P}_n & \to & \mathcal{P}_{2n+1} \\ \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k & \mapsto & \sum\limits_{k=0}^{n} a_k^3 X^{2k+1} \end{array}$$

Abgabe je Zweier-/Dreiergruppe eine Lösung bis Montag 29.1.2018, 14 Uhr – vor der Vorlesung oder im Übungskasten vor der Bibiliothek, Theresienstraße 1. Stock