Übungsblatt 2 zu Mathematik I für Naturwissenschaftler

Aufgabe 5: (15 Punkte)
Für welches $n \in \mathbb{N}$ gilt:

a) $n^3 < 4^n$

b) $n^3 < n!$

c) $4^n < n!$

Aufgabe 6: (15 Punkte) Zeige, daß durch

$$\begin{array}{c|ccc} + & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{c|ccc} \cdot & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{array}$$

ein Körper $(\{0,1,2\},+,\cdot)$ definiert wird.

Wir betrachten bei den folgenden beiden Aufgaben diese Situation: Es sei $\emptyset \neq Y \subseteq X$, wobei $X = \mathbb{N}$ oder $X = \mathbb{Z}$ oder $X = \mathbb{Q}$ oder $X = \mathbb{R}$ ist. Wir wiederholen noch mal die Definitionen: Dann heißt

- $x \in X$ eine **obere Schranke** von Y in $(X, \leq)$, wenn $y \leq x$ für alle $y \in Y$ erfüllt ist.
- $x \in X$ eine **untere Schranke** von Y in $(X, \leq)$, wenn $x \leq y$ für alle $y \in Y$ erfüllt ist.
- $x \in X$ heißt **Maximum** von Y in $(X, \leq)$, wenn x obere Schranke von Y in $(X, \leq)$ ist und $x \in Y$ gilt.
- $x \in X$ heißt **Minimum** von Y in $(X, \leq)$, wenn x untere Schranke von Y in $(X, \leq)$ ist und $x \in Y$ gilt.
- $x \in X$ heißt **Supremum** von Y in $(X, \leq)$, wenn x obere Schranke von Y ist und für jede weitere obere Schranke z von Y in $(X, \leq)$ gilt: $x \leq z$
- $x \in X$ heißt **Infimum** von Y in $(X, \leq)$, wenn x untere Schranke von Y ist und für jede weitere untere Schranke z von Y in $(X, \leq)$ gilt: $z \leq x$

Aufgabe 7: (10 Punkte) Zeige:

a) Existiert ein Supremum x von Y, so ist es eindeutig bestimmt; Schreibweise: $\sup(Y)$.

b) Existiert ein Maximum x von Y, so ist es eindeutig bestimmt; Schreibweise: $\max(Y)$. In diesem Fall existiert auch $\sup(Y)$ und es gilt $\max(Y) = \sup(Y)$.

Aufgabe 8: (15 Punkte) Entscheide, ob die folgenden Mengen in $\mathbb{R}$ ein Minimum, Infimum, Supremum oder Maximum haben und gib diese gegebenenfalls an:

a) $Y := \{-\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$

b) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [-\frac{2}{n}, \frac{1}{n}]$

c) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}]1 - \frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{2^n}[$

Abgabe je Zweier-/Dreiergruppe eine Lösung bis Montag 20.11.2017, 14 Uhr – vor der Vorlesung oder im Übungskasten vor der Bibiliothek, Theresienstraße 1. Stock