

Übungsblatt 1 zu Mathematik I für Naturwissenschaftler

Aufgabe 1: (20 Punkte) ¹

Entscheide (mit Begründung), ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

- a) Ist $X := \{p \in \mathbb{R} : -1 \leq p \leq 2\}$, $Y := \{q \in \mathbb{R} : -1 \leq q \leq 5\}$ und

$$\Gamma := \{(p, p) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq p \leq 2\} \cup \{(p, 4 - p) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq p \leq 2\},$$

so ist $f = (X, Y, \Gamma)$ eine Funktion.

- b) Die Funktion $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ist injektiv.
 $m \mapsto 2m - 1$

- c) Die Funktion $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ist surjektiv.
 $m \mapsto m + 3$

- d) Sind $h : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ und $k : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ so gilt $h(k(q)) = k(h(q))$ für alle $q \in \mathbb{Q}$.
 $q \mapsto q^4$ $q \mapsto q - 2$

Aufgabe 2: (20 Punkte)

- a) Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Bestimme $f^{-1}([-1, 0[)$, $f^{-1}([-1, 0])$, $f^{-1}([0, 1])$, $f^{-1}([1, 2])$ und $f^{-1}([0, 1])$.
 $x \mapsto x^2 + 1$

- b) Ist $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ injektiv? Begründe die Antwort!
 $m \mapsto m^3$

- c) Zeige, daß $f : [0, \infty[\rightarrow [0, 1[$ bijektiv ist.
 $x \mapsto \frac{x}{1+x}$

Hinweis: Rate die Umkehrfunktion und zeige, daß Du die richtige Umkehrfunktion geraten hast...

Aufgabe 3: (15 Punkte)

- a) Es sei $f : X \rightarrow Y$ eine Funktion, I eine Menge und $X_i \subseteq X$ für alle $i \in I$. Zeige:

$$f\left(\bigcup_{i \in I} X_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(X_i)$$

- b) Gib ein Beispiel für eine Funktion $f : X \rightarrow Y$ und $A, B \subseteq X$ mit $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$ an.

Aufgabe 4: (10 Punkte)

Es sei $x \in [-1, \infty[$, zeige, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ die Bernoulli-Ungleichung

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

gilt.

Abgabe je Zweier-/Dreiergruppe eine Lösung bis Montag 30.10.2017, 14 Uhr – vor der Vorlesung oder im Übungskasten vor der Bibliothek, Theresienstraße 1. Stock

¹Die bekannten Rechenregeln für ganze Zahlen $m \in \mathbb{Z}$, rationale Zahlen $q \in \mathbb{Q}$ und $p \in \mathbb{R}$ darf und sollte man bei Aufgabe 1 und 2 benutzen!