Tutorium 8 zu Analysis und Lineare Algebra II (Physik)

Aufgabe 1: Zeige, daß die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -5 \\ 3 & -1 & 3 \\ 4 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

diagonalisierbar ist und gib eine Basis von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A an.

Aufgabe 2:
Es sei $A \in M_n(\mathbb{R})$ eine $n \times n-$Matrix mit reellen Einträgen, deren charakteristisches Polynom $p_A(X) = \det(A - XE_n)$ – aufgefaßt als Polynom mit komplexen Koeffizienten eine $m-$fache Nullstelle bei $\gamma \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ hat.

a) Zeige: Die komplex konjugierte Zahl $\overline{\gamma}$ ist eine $m-$fache Nullstelle von p_A.

b) Zeige: Ist $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ ein Eigenvektor der $\mathbb{C}-$linearen Abbildung $\begin{array}{rccc} F_A : & \mathbb{C}^n & \to & \mathbb{C}^n \\ & \underline{x} & \mapsto & A\underline{x} \end{array}$ zum Eigenwert γ, dann ist der Vektor $\underline{w} := \begin{pmatrix} \overline{v_1} \\ \vdots \\ \overline{v_n} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$, der aus $\underline{v}$ durch komplexes Konjugieren jeder Komponente hervorgeht, ein Eigenwert von F_A zum Eigenwert $\overline{\gamma}$.

c) Es sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$. Entscheide, ob es für die $\mathbb{C}-$lineare Abbildung $\begin{array}{rccc} F_A : & \mathbb{C}^3 & \to & \mathbb{C}^3 \\ & \underline{x} & \mapsto & A\underline{x} \end{array}$ eine Basis des $\mathbb{C}^3$ aus Eigenvektoren von F_A gibt und gib diese gegebenenfalls an. Entscheide, ob es für die $\mathbb{R}-$lineare Abbildung $\begin{array}{rccc} f_A : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & \underline{x} & \mapsto & A\underline{x} \end{array}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von f_A gibt und gib diese gegebenenfalls an.