Tutorium 5 zu Analysis und Lineare Algebra II (Physik)

Aufgabe 1:

Es sei K ein Körper, $m, n \in \mathbb{N}$ und $A \in M(m \times n, K)$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in K^m$.

a) Ist $m < n$: Unter welchen Bedingungen besitzt $A\underline{x} = \underline{b}$ eine Lösung? Falls es eine Lösung gibt – unter welchen Bedingungen ist diese eindeutig?

b) Ist $m = n$: Unter welchen Bedingungen besitzt $A\underline{x} = \underline{b}$ eine Lösung? Falls es eine Lösung gibt – unter welchen Bedingungen ist diese eindeutig?

c) Ist $m > n$: Unter welchen Bedingungen besitzt $A\underline{x} = \underline{b}$ eine Lösung? Falls es eine Lösung gibt – unter welchen Bedingungen ist diese eindeutig?

Aufgabe 2:

Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Zeige, daß $A\underline{x} = \underline{b}$ für jedes $\underline{b} \in \mathbb{R}^4$ eine eindeutige Lösung besitzt und bestimme diese.

Aufgabe 3:

Für $a, b, c \in \mathbb{R}$ betrachte das lineare System

$$\begin{cases} ax_1 & & +x_3 & +x_4 & = 1; \\ x_1 & & +2x_3 & +x_4 & = 1; \\ -x_1 & +x_2 & -2x_3 & +x_4 & = b; \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = c. \end{cases} \tag{1}$$

a) Für welche $a \in \mathbb{R}$ hat (1) für alle $b, c \in \mathbb{R}$ eine Lösung $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$?

b) Untersuche in diesem Fall, ob die Lösung eindeutig ist. Falls ja, bestimme sie.

c) Für die Werte von a, für welche die Lösung von (1) nicht eindeutig ist, bestimme alle Werte von b und c, für welche eine Lösung existiert.

d) Finde in diesem Fall alle möglichen Lösungen von (1) mit $b = 0$.