Tutorium 4 zu Analysis und Lineare Algebra II (Physik)

Aufgabe 1:
Es sei $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung, deren darstellende Matrix bezüglich der Standardbasis gegeben ist durch $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

a) Zeige, daß $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Bestimme die darstellende Matrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ von f bezüglich der Basis $\mathcal{B}$.

Aufgabe 2:
Es sei K ein Körper. Für $A = (a_1 \cdots a_n) \in M(1 \times n, K)$ zeige:

$$\operatorname{Rang}(A^T \cdot A) = \begin{cases} 1 & \text{für } A \neq (0 \cdots 0) \\ 0 & \text{für } A = (0 \cdots 0) \end{cases}$$

Aufgabe 3:
Sei $\theta \in \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$ und

$$\mathcal{B}_\theta = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis von $\mathbb{R}^2$.

a) Sei $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, gib $\Phi_{\mathcal{B}_\theta}(\mathbf{v})$ und $\Phi_{\mathcal{B}_\theta}^{-1}(\mathbf{v})$ an.

b) Berechne die darstellenden Matrizen $A := M_{\mathcal{B}_0}^{\mathcal{B}_\theta}(\mathrm{id}_V)$ und $B := M_{\mathcal{B}_\theta}^{\mathcal{B}_0}(\mathrm{id}_V)$.

c) Zeige, dass $B \cdot A = E_2 = M_{\mathcal{B}_\theta}^{\mathcal{B}_\theta}(\mathrm{id}_V)$