Mathematisches Institut der Universität München 4. 5. 2023

Tutorium 3 zu Analysis und Lineare Algebra II (Physik)

Aufgabe 1:

Seien $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & 9 \end{pmatrix}$ Matrizen. Für welche Paare (K, M) mit $K, M \in \{A, B, C, D, F, G\}$ kann man das Matrixprodukt $K \cdot M$ bilden? Berechne die möglichen Produkte $K \cdot M$ für $K, M \in \{A, B, C, D, F, G\}$. Welche Beispiele findet man hier, die zeigen, daß die Multiplikation von Matrizen im allgemeinen nicht kommutativ ist?

Aufgabe 2:

Es sei $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung, deren darstellende Matrix bezüglich der Standardbasis gegeben ist durch $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -6 \\ 3 & 5 & -3 \\ -6 & -3 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

a) Zeige, daß $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Bestimme die darstellende Matrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ von f bezüglich der Basis $\mathcal{B}$.

Aufgabe 3:

Es seien $n_1, ..., n_k \in \mathbb{N}$ mit $n_1 + ... + n_k = n$, K ein Körper und $A_1 \in M_{n_1}(K)$,..., $A_k \in M_{n_k}(K)$ gegeben. Betrachte die Blockdiagonalmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & & \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{A_k} \end{pmatrix}$$

bei der die Matrizen $A_1, ..., A_k$ als Blöcke längs der Diagonale auftreten und deren andere Einträge 0 sind. Zeige, daß für jedes $l \in \mathbb{N}$ für das l-fache Produkt A^l von A gilt:

$$A^l = \begin{pmatrix} \boxed{A_1^l} & & & \\ & \boxed{A_2^l} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{A_k^l} \end{pmatrix}$$