Mathematisches Institut der Universität München 27.4.2023

Tutorium 2 zu Analysis und Lineare Algebra II (Physik)

Aufgabe 1:
Es sei $P^2([-1,1]) := \left\{ \begin{array}{rcl} p : [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax^2 + bx + c \end{array} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$.

a) Zeige, daß $\mathcal{B}_1 := \left\{x^n, n = 0, 1, 2\right\}$ als auch $\mathcal{B}_2 := \left\{1, x, \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right)\right\}$ Basen von $P^2([-1,1])$ sind.

b) Drücke das Polynom $p \in P^2([-1,1])$, $p(x) := (x+1)^3 - (x-1)^3$ sowohl bezüglich der Basis $\mathcal{B}_1 := \left\{x^n, n = 0, 1, 2\right\}$ als auch der Basis $\mathcal{B}_2 := \left\{1, x, \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right)\right\}$ aus.

Aufgabe 2:
Seien V und W zwei $\mathbb{R}$-Vektorräume. Untersuche die folgenden Abbildungen $f_i : V \to W$ auf Linearität. Untersuche alle linearen Abbildungen auf Surjektivität und Injektivität.

a) $V = W = \mathbb{R}^2,\ f_1(x, y) = (3x + 2y, 4x + y)$

b) $V = W = \mathbb{R}^2,\ f_2(x, y) = (7x + 14y - 1, x + 2y + 5)$

c) $V = W = \mathbb{R},\ f_3(x) = x^3$

Aufgabe 3:
Es sei V ein $K-$Vektorraum und $P : V \to V$ sei $K-$linear und erfülle $P \circ P = P$. Zeige $V = \mathrm{Kern}(P) \oplus P(V)$.