Mathematisches Institut der Universität München 6.7.2023

Tutorium 12 zu Analysis und Lineare Algebra II (Physik)

Aufgabe 1:
Es sei $V := \left\{ \begin{array}{rcl} p : [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & a_2x^2 + a_1x + a_0 \end{array} : a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R} \right\}$.

a) Zeige, daß V mit

$$\begin{array}{rcl} \langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V & \to & \mathbb{R} \\ (p,q) & \mapsto & p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1) \end{array}$$

zu einem $\mathbb{R}-$Vektorraum mit Skalarprodukt wird.

b) Orthonormalisiere mit dem Gram-Schmidtverfahren die Elemente $\begin{array}{rcl} \tau_n : [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n \end{array}$, $n = 0, 1, 2$ in $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Aufgabe 2:
Bestimme eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ bestehend aus Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & -5 \\ 5 & 7 & 5 \\ -5 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Gibt es selbstadjungierte Matrizen $B, C \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$ mit $B^2 = A$ bzw $C^3 = A$? Wenn ja so gib eine solche an!