9. Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 25: (F23T2A3)

a) Zeigen Sie, daß die Funktion $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & 2z^2+2+e^{iz} \end{array}$ genau eine Nullstelle ξ in $U := \{z \in \mathbb{C} : |z-i| < 1\}$ besitzt und diese einfach ist. Folgern Sie hieraus, daß $\begin{array}{rcl} g: U\backslash\{\xi\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{e^z}{f(z)} \end{array}$ keine Stammfunktion besitzt.

b) Es sei G ein Gebiet in $\mathbb{C}$, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph, $u := \mathrm{Re}\,(f)$ und $v := \mathrm{Im}\,(f)$. Skizzieren Sie die Mege

$$Q := \{w \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}\,(w)| + |\mathrm{Im}\,(w)| = 1\}$$

und zeigen Sie: Falls $|u(z)| + |v(z)| = 1$ für jedes $z \in G$, so ist f konstant auf G.

Aufgabe 26: (H21T2A1)
Es sei $r \in \mathbb{R}$ mit $0 < r < 1$.

a) Zeigen Sie, daß die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} z^k$ auf der Menge $\{z \in \mathbb{C} : |z| \le r\}$ gleichmäßig gegen die Funktion $f(z) = \dfrac{z}{1-z}$ konvergiert.

b) Zeigen Sie, daß die Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)z^k$ auf der Menge $\{z \in \mathbb{C} : |z| \le r\}$ gleichmäßig gegen die Funktion $g(z) = \dfrac{1}{(1-z)^2}$ konvergiert.

c) Zeigen Sie, daß für alle hinreichend großen $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\int\limits_{|z|=r} \frac{dz}{1+2z+3z^2+...+nz^{n-1}} = 0$$

Aufgabe 27: (F15T3A3)
Es seien f und g holomorph auf $K_2(0) := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$ und $f(\xi) \neq 0$ für alle $\xi \in \mathbb{C}$ mit $|\xi| = 1$ und für jedes $\xi \in \mathbb{C}$ mit $|\xi| = 1$ sei $\frac{g(\xi)}{f(\xi)}$ reell und positiv. Zeigen Sie, daß f und g in $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ dieselbe Anzahl von Nullstellen (mit Vielfachheit gezählt) besitzen.