

## 8. Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

### Aufgabe 22: (H10T1A4)

Zeigen Sie mit Hilfe des Residuensatzes, daß

$$I := \int_0^{2\pi} \frac{dt}{5 + 3 \cos(t)} = \frac{\pi}{2}$$

ist.

### Aufgabe 23: (F14T3A3)

a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{r^2}{1 + r^4} dr$$

b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3x}{1 + |x|^4}.$$

Dabei bezeichnet  $|x| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$  die euklidische Norm von  $x \in \mathbb{R}^3$ .

### Aufgabe 24: (F23T1A2)

Es sei

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} \setminus \left\{ i, i + \frac{1}{\pi} \right\} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto \cos\left(\frac{1}{z-i}\right) \cdot \frac{1}{z-i-\frac{1}{\pi}} \end{aligned}$$

a) Geben Sie den Typ aller Singularitäten von  $f$  und im Fall von Polstellen auch deren Ordnung und Residuum an. Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Geben Sie die maximale offene punktierte Kreisscheibe mit Mittelpunkt  $i$  an, auf der die Laurentreihenentwicklung von  $f$  um  $i$  konvergiert, und bestimmen Sie das Residuum von  $f$  in  $i$ .

c) Es sei  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ . Berechnen Sie das Kurvenintegral  $\int_{\gamma} f(z) dz$ .  
 $t \mapsto 2e^{it}$