7. Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 19: (F23T1A4)
Entscheiden Sie, ob es Funktionen f mit den jeweils angegebenen Eigenschaften gibt. Geben Sie im Fall der Existenz ein Beispiel an und begründen Sie kurz, warum dieses die geforderten Eigenschaften besitzt. Zeigen Sie andernfalls, daß es kein solches Beispiel geben kann.

a) Eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(0) = 0$ und $|f(z)| = 2$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$.

b) Eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(0) = \pi$ und $|f(z)| = 2$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$.

c) Eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ mit einer Polstelle bei $z = 0$ so daß keine holomorphe Funktion $F : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ existiert mit $F' = f$.

d) Eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ mit einer wesentlichen Singularität bei $z = 0$ so daß eine holomorphe Funktion $F : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ existiert mit $F' = f$.

e) Eine auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deren Ableitung an der Stelle $x = 0$ nicht stetig ist.

Aufgabe 20: (H15T3A1) Gegeben sei die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C}\backslash\{0, -1, -1+i\} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \frac{z}{(z^2+z)(z+1-i)^2} \end{aligned}$$

$\gamma(r)$ bezeichne den Weg entlang der Kreislinie mit Mittelpunkt 0 und Radius $r > 0$ mit einem Umlauf in positiver Richtung. Bestimmen Sie für alle Werte $r \in \mathbb{R}^+\backslash\{1, \sqrt{2}\}$ den Wert des Integrals

$$W(r) := \int\limits_{\gamma(r)} f(z)dz$$

Aufgabe 21: (F21T1A5)

a) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie die Lage und die Ordnung der Pole der meromorphen Funktion $f(z) = \dfrac{1}{1+z^n}$.

b) Zeigen Sie, daß für $n \geq 2$ gilt:

$$\int\limits_0^\infty \frac{1}{1+z^n}dz = \frac{\frac{\pi}{n}}{\sin(\frac{\pi}{n})}$$

Hinweis: Betrachten Sie das Wegintegral $\int\limits_\gamma \dfrac{1}{1+z^n}dz$ für den geschlossenen Weg γ, der von 0 in gerader Linie nach R, von dort auf dem Kreissegment nach $Re^{\frac{2\pi i}{n}}$ und von hier aus in gerader Linie wieder zurück nach 0 verläuft.