6. Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 16: (F15T2A1)

a) Definiere $U := \{z \in \mathbb{C} : 2|\mathrm{Re}\,(z)| + 3|\mathrm{Im}\,(z)| + \frac{1}{1+|z|^2} < \frac{11}{2}\}$. Gibt es eine holomorphe Funktion $h : \mathbb{C} \to U$ und Punkte $v, w \in \mathbb{C}$ mit $h(v) = \frac{i}{2}$ und $h(w) = 1 - i$? Begründung!

b) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ eine nicht-leere offene Menge und $z_0 \in \Omega$. Seien $f : \Omega \to \mathbb{C}$ und $g : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen mit $f(z_0) = f^{(1)}(z_0) = 0$, $g(z_0) = g^{(1)}(z_0) = 0$ und $g^{(2)}(z_0) \neq 0$. Zeigen Sie:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f^{(2)}(z_0)}{g^{(2)}(z_0)}$$

c) Definiere $\begin{array}{rcl} F : \mathbb{C}\backslash\{0\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{1-\cos(z)}{z^2} \end{array}$. Ist die isolierte Singularität 0 von F hebbar? Begründung!

Aufgabe 17: (H16T1A2) Bestimmen Sie für jede der Singularitäten von f im Komplexen den Typ und berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_{|z|=4} f(z)dz$ für

a) $f(z) = \dfrac{\sin(z)}{e^z - e^\pi}$

b) $f(z) = \sin\left(e^{\frac{1}{z}}\right)$

Aufgabe 18: (F16T1A1)

a) Finden Sie eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C}\backslash\{-1, 1\} \to \mathbb{C}$, welche in den Punkten -1 und 1 wesentliche Singularitäten mit den Residuen

$$\mathrm{Res}(f, -1) = -1, \quad \mathrm{Res}(f, 1) = 1$$

besitzt. Ist f durch diese Eigenschaften eindeutig bestimmt?

b) Sei f die in (a) gefundene Funktion. Für $\alpha \in [0, \infty[$ sei γ_α der geschlossene Weg, der die Punkte

$$2 + \alpha i, -2 - i, -2 + i.2 - \alpha i, 2 + \alpha i$$

in der angegebenen Reihenfolge durch Geradenstücke verbindet. Für welche Werte von α ist das komplexe Wegintegral

$$\int_{\gamma_\alpha} f(z)dz$$

definiert? Berechnen Sie das Integral für diese Werte von α.