5. Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 13: (H21T1A3)
Auf dem Gebiet

$$\Omega := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\pi\}$$

betrachten wir die meromorphe Funktion

$$f(z) := \frac{e^z - 1}{\sin(z)}$$

a) Bestimmen Sie alle Singularitäten von f und deren Typ.

b) Berechnen Sie die Residuen von f in allen Singularitäten.

c) Besitzt die Funktion f eine Stammfunktion auf Ω?

d) Bestimmen Sie $c_1, c_2, a_1, a_2 \in \mathbb{C}$, so daß die Funktion

$$F(z) := f(z) + c_1 \frac{1}{z - a_1} + c_2 \frac{1}{z - a_2}$$

auf Ω eine Stammfunktion besitzt.

Aufgabe 14: (F23T3A3)

a) Formulieren Sie den Satz von Liouville und geben Sie einen Beweis an, der auf der Cauchyschen Integralformel für holomorphe Funktionen und deren Ableitungen oder auf dem Residuensatz basiert.

b) Es sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl und $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion mit

$$\operatorname{Re} f(z) \leq \operatorname{Re} z^n$$

für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, daß dann f die Gestalt $f(z) = z^n + c$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{C}$ besitzt.

Aufgabe 15: (F23T3A2)
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen mit $\pi \in U$.

a) Die Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ sei holomorph mit $f(\pi) = f'(\pi) = 0$ und $f''(\pi) = 1$. Bestimmen Sie für $\begin{array}{rcl} g : U & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \sin(z) f(z) \end{array}$ die Nullstellenordnung in π.

b) Geben Sie an, für welche natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ eine holomorphe Funktion $h : U \backslash \{\pi\} \to \mathbb{C}$ mit $(h(z))^n = (z - \pi)^6$ für alle $z \in U \backslash \{\pi\}$ existiert. Begründen Sie Ihre Antwort.
Hinweis: Wenn es ein derartges h gibt, welchen Typ hat dann die isolierte Singularität von h bei π?