

4. Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 10: (H07T1A3)

- a) Bestimmen Sie die Laurentreihenentwicklung der meromorphen Funktion $f(z) = \frac{3}{z^2+z-2}$ auf dem unbeschränkten Kreisring $R_{2,\infty} := \{z \in \mathbb{C} : |z| > 2\}$ um $z = 0$.
- b) Besitzt f eine Stammfunktion auf $R_{2,\infty}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 11: (F08T3A3)

Die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ sei holomorph und es gelte $|f(z)| \geq |e^z|$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Man zeige, daß f in allen Punkten aus \mathbb{Z} holomorph ergänzbar ist und daß $f(z) = Ce^z$ mit einer Konstanten C gilt.

Aufgabe 9: (H09T2A5)

- a) Finden Sie die Laurentreihenentwicklung der Funktion $f(z) = \frac{1}{(z+2)^3(z^2+1)}$ um $z_0 = -2$. Bestimmen Sie den Konvergenzbereich der gefundenen Laurentreihe.
- b) Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int_{|z+1|=2} f(z) dz$. Der Integrationsweg wird in positiver Richtung (gegen den Uhrzeigersinn) durchlaufen.