

### 3. Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

**Aufgabe 7:** (F03T3A1)

Es sei  $\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  und  $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{C}$  analytisch mit  $f(0) = 0$ . Zeige

a) Die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} f(z^n)$  konvergiert lokal gleichmäßig absolut auf  $\mathbb{E}$ .

b) Ist  $f$  sogar auf einer offenen Umgebung  $U$  des Abschlusses  $\overline{\mathbb{E}}$  analytisch und konvergiert  $\sum_{n=1}^{\infty} f(z^n)$  absolut für alle  $z \in \overline{\mathbb{E}}$ , so ist  $f$  identisch 0.

**Aufgabe 8:** (F06T2A3)

Bestimmen Sie alle holomorphen Funktionen  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , die  $f(e^{\sqrt{2}\pi in}) = 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  erfüllen.

**Aufgabe 9:** (F06T2A2)

Berechnen Sie

a) 
$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{(z-1)(z-i)}$$

b) 
$$\int_{|z|=1} \frac{\exp(z^2 + z + 1)}{z} dz$$