2. Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 4: (H01T3A3)
Es sei $\emptyset \neq G \subseteq \mathbb{C}$ ein konvexes Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $\operatorname{Re} f'(z) > 0$ für alle $z \in G$. Zeigen Sie, daß f injektiv ist.

Aufgabe 5: (F21T2A2)
Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen über alle holomorphen Funktionen $f : G \to \mathbb{C}$ ($G \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet) gelten. Bei richtigen Aussagen geben Sie eine kurze Begründung mit Nennung aller benutzten Sätze an, bei falschen ein Gegenbeispiel. Zur Erinnerung: Ein Gebiet ist eine nichtleere, offene und zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{C}$.

a) Ist $G = \mathbb{C}$ und f beschränkt, so ist f konstant.

b) Ist $G = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ und f beschränkt, so ist f konstant.

c) Ist G die offene rechte Halbebene und f beschränkt, so ist f konstant.

d) Ist G ein beschränktes Gebiet und hat f unendlich viele Nullstellen, so ist f konstant.

e) Ist G ein beschränktes Gebiet und hat f unendlich viele Nullstellen in einer kompakten Teilmenge von G, so ist f konstant.

f) Ist G ein beschränktes Gebiet, so ist $f(G)$ beschränkt.

Aufgabe 6: (H21T1A4)
Es sei $\mathbb{D}$ die offene Einheitskreisscheibe der komplexen Ebene $\mathbb{C}$.

a) (i) Es sei $f : \mathbb{D}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ holomorph und f habe in $z = 0$ eine Polstelle. Zeigen Sie: Es existiert ein $R \in [0, \infty[$ derart, daß

$$\mathbb{C}\backslash\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\} \subseteq f(\mathbb{D}\backslash\{0\}).$$

Hinweis: Betrachten Sie $\frac{1}{f}$.

(ii) Es sei $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ holomorph und es existiert ein $R \in [0, \infty[$ derart, daß

$$\mathbb{C}\backslash\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\} \subseteq f(\mathbb{C}\backslash\{0\}).$$

Hat f dann eine Polstelle in $z = 0$?

b) Es sei $f : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ stetig, holomorph in $\mathbb{D}$ und $|f(z)| \leq 1$ für alle $z \in \mathbb{D}$. Weiter seien $w_1, w_2 \in \mathbb{D}$, $w_1 \neq w_2$ Nullstellen von f und $g : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{w_1 - z}{1 - \overline{w_1}z} \cdot \frac{w_2 - z}{1 - \overline{w_2}z}$. Zeigen Sie $|f(z)| \leq |g(z)|$ für jedes $z \in \mathbb{D}$.
Hinweis: Betrachten Sie $\frac{f}{g}$.