13. Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 37: (F23T1A3)
Im Weiteren bezeichnen $(f_n : [0,1] \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$, $(g_n : [0,1] \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(h_n : [0,1] \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen stetiger reellwertiger Funktionen und 0 die Nullfunktion auf $[0,1]$.

a) Beweisen Sie: Konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen 0, dann gibt es eine Schranke $A \in \mathbb{R}$ mit $|f_n(x)| \le A$ für alle $x \in [0,1]$ und alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Bestimmen Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ das Maximum der Funktion $g_n(x) := n^2 x e^{-nx}$ auf $[0,1]$.

c) Beweisen Sie: Die Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus Teilaufgabe (b) konvergiert auf $[0,1]$ punktweise, aber nicht gleichmäßig gegen 0.

d) Beweisen oder widerlegen Sie jeweils: Konvergieren $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen 0 und $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen 0, dann konvergiert die Folge $(f_n h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Produktfunktionen $f_n h_n$

   (1) punktweise gegen 0.

   (2) gleichmäßig gegen 0

Aufgabe 38: (F23T2A4)
Auf

$$D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0, y \le 0\} \cup \{(0,0)\}$$

betrachten wir die Funktion

$$\begin{aligned} f : D &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto f(x,y) = (1+x)(1+y) - e^x \end{aligned}.$$

a) Geben Sie an, welche Punkte in $\mathbb{R}^2$ innere Punkte beziehungsweise Randpunkte von D sind. Entscheiden sie begründet, ob D offen beziehungsweise abgeschlossen ist.

b) Entscheiden Sie mit Begründung, ob f im Inneren von D lokale Extremalstellen besitzt.

c) Geben Sie mit Nachweis alle lokalen Extremalstellen von f an, die auf dem Rand von D liegen. Bedenken Sie, daß diese Stellen gemäß Definition von f in D liegen müssen.

Aufgabe 39: (F23T3A5)
Auf der Menge

$$\Omega := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 3x^2 + 4y^2 \le z\}$$

sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y,z) = \frac{1 + 4x^2 + 3y^2}{1 + z^2}.$$

a) Für jedes $\zeta > 0$ bezeichnet $f|_{\Omega_\zeta}$ die Einschränkung von f auf die Menge

$$\Omega_\zeta := \{(x, y, z) \in \Omega : z = \zeta\}.$$

Zeigen Sie, daß $f|_{\Omega_\zeta}$ ein globales Maximum und ein globales Minimum besitzt und deren Werte gegeben sind durch

$$\frac{1 + \frac{4}{3}\zeta}{1 + \zeta^2} \quad \text{beziehungsweise} \quad \frac{1}{1 + \zeta^2}.$$

b) Entscheiden Sie jeweils mit Begründung, ob f ein globales Maximum beziehungsweise ein globales Minimum besitzt, und bestimmen Sie gegebenenfalls dessen Wert.