# 12. Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

**Aufgabe 34:** (F23T1A1)

a) Bestimmen Sie eine nicht fortsetzbare Lösung $\lambda : I \to \mathbb{R}$ der exakten Differentialgleichung

$$2t + 4t^3 + 2xx' = 0 \tag{1}$$

zum Anfangswert $x(0) = 1$. Geben Sie insbesondere auch deren Definitionsintervall an.

b) Zeigen Sie, daß für jede Lösung $\mu : J \to \mathbb{R}$ von (1) sowohl $J$ als auch $\mu(J)$ beschränkt ist.

**Aufgabe 35:** (F23T2A2)

In dieser Aufgabe bezeichne $f$ die stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} x\ln(|x|) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$.

a) Zeigen Sie, daß $f$ nicht lokal Lipschitz stetig ist.

b) Bestimmen Sie die auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung des Anfngswertproblems

$$x' = f(x), \quad x(0) = e^{-1}.$$

Hinweis: Es könnte helfen, die Ableitung der Funktion $G : [0,1] \to \mathbb{R}$, $G(x) := \ln(|\ln(x)|)$ zu berechnen.

c) Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $x : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung $x' = f(x)$. Erläutern Sie, was sich über das Monotonieverhalten der Lösung aussagen läßt, falls $0 < x(t) < 1$ für alle $t \in I$, und was, falls $-1 < x(t) < 0$ für alle $t \in I$ gilt.

d) Entscheiden Sie mit Begründung, ob das Anfangswertproblem

$$x' = f(x), \quad x(0) = 0$$

eine eindeutig bestimmte maximale Lösung besitzt.

**Aufgabe 36:** (F23T3A4)

a) Es sei $b : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ stetig mit

$$\int_0^\infty |b(t)|dt < \infty,$$

und $y : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ sei eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = (-1 + b(t)) \cdot y.$$

Zeigen Sie, daß $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$ gilt.

b) Es sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Zeigen Sie: Falls jede Lösung $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, t \mapsto x(t)$ der Differentialgleichung $x' = Ax$ auf $[0, \infty)$ beschränkt ist, so gilt $\operatorname{Re}(\lambda) \leq 0$ für jeden Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ von $A$. Entscheiden Sie begründet, ob die Umkehrung dieser Aussage auch richtig ist.