10. Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 28: (F21T1A2)

a) Formulieren Sie den Satz von Rouché.

b) Zeigen Sie, daß die Gleichung

$$z + e^{-z} = 2021$$

in der Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,(z) > 0\}$ genau eine Lösung besitzt.

c) Zeigen Sie, daß diese Lösung reell ist.

Aufgabe 29: (F15T1A1)
In dieser Aufgabe bezeichne $B_r(a) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$ für $a \in \mathbb{C}$ und $r > 0$. Ferner sei $\begin{aligned} f : \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto 6z^6 - 2z^2 + 1 \end{aligned}$ gegeben.

a) Formulieren Sie den Satz von Rouché für ganze Funktionen.

b) Zeigen Sie, daß $B_4(1) \subseteq f(B_1(0)) \subseteq B_8(1)$ gilt.
Hinweis: Für den Nachweis der ersten Inklusion könnte der in (a) formulierte Satz hilfreich sein.

c) Entscheiden Sie mit Beweis, ob $f(B_1(0)) \cap \mathbb{R} = f(B_1(0) \cap \mathbb{R})$ gilt.

Aufgabe 30: (F03T1A5)
Sei $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ die kompaktifizierte komplexe Ebene und sei $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ die durch $f(z) := \frac{z}{z-i}$ gegebene gebrochen-lineare Funktion.

a) Bestimmen Sie die Fixpunkte von f, die Umkehrabbildung f^{-1} und die Bilder bzw. Urbilder von $0, 1, i$ und ∞.

b) Skizzieren Sie das Bild der rechten Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,(z) \geq 0\}$, der oberen Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\,(z) \geq 0\}$ und des offenen Einheitskreises $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ unter der Abbildung f.