1. Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 1: (H11T2A2)
Beantworten Sie die folgenden zwei Fragen zur Funktionentheorie jeweils mit einer kurzen Begründung.

a) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f^{(n)}(0) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Welchen Wert besitzt das Kurvenintegral $\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-1|=R} \frac{f(z)}{z-1} dz$ für $R > 0$, wobei $|z-1| = R$ den positiv durchlaufenen Kreis um 1 mit Radius R bezeichnet?

b) Gibt es eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(\frac{1}{n}) = \frac{n}{2n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$?

Aufgabe 2: (H13T1A1)
Konstruieren Sie jeweils eine nichtkonstante holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit den angegebenen Eigenschaften oder begründen Sie, warum es eine solche Funktion nicht geben kann.

a) f bildet $\mathbb{C}$ auf die offene Kreisscheibe $D := \{u + iv : (u-1)^2 + v^2 < 4\}$ ab.

b) $f(z) = 0$ gilt genau für $z = k$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

c) f erfüllt $f(0) = 2$ und $|f(z)| \leq 1$ für $|z| = 1$.

Aufgabe 3: (F23T2A1)
Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen über holomorphe Funktionen gelten. Geben Sie jeweils eine Begründung oder ein Gegenbeispiel an.

a) Die Funktion $\begin{array}{rcl} f : \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}\,(z)| < 1\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & e^z \end{array}$ ist beschränkt.

b) Die Funktion $\begin{array}{rcl} f : \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Im}\,(z)| < 1\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{1}{1+z^2} \end{array}$ ist beschränkt.

c) Ist $\Omega := \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}\,(z)| > 1\}$ und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f^{(n)}(2) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, so ist f die Nullfunktion.

d) Ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant, so stimmt der Abschluß von $f(\mathbb{C})$ mit $\mathbb{C}$ überein.