Übungen zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 18: (F23T1A5)
Für ein stetig differenzierbares Vektorfeld $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ betrachten wir die Differentialgleichung $x' = f(x)$. Eine Erhaltungsgröße für f ist eine stetig differnzierbare Funktion $E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, die entlang jeder Lösungskurve dieser Differentialgleichung konstant ist.

a) Zeigen Sie: Ist $E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Erhaltungsgröße für f, so auch für das Vektorfeld $x \mapsto s(x)f(x)$ für jede stetig differenzierbare Funktion $s : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

b) Es sei nun A eine reelle $n \times n-$Matrix. Zeigen Sie: Ist E eine Erhaltungsgröße für das Vektorfeld $f(x) = Ax$ und B eine invertierbare reelle $n \times n-$Matrix, so ist $x \mapsto E(B^{-1}x)$ eine Erhaltungsgröße für das Vektorfeld $g(x) = BAB^{-1}x$.

c) Es sei nun A eine reelle $2 \times 2-$Matrix mit den beiden reellen Eigenwerten $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 2$. Zeigen Sie, daß das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x) = Ax$ eine nichtkonstante Erhaltungsgröße hat.

Aufgabe 19: (F23T2A5)

a) Zeigen Sie, daß alle maximalen Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} x' &= t + \frac{\sin(t)}{1+x^2+y^2} \cdot y \\ y' &= 3 + \frac{\cos(t)}{1+x^2+y^2} \cdot x \end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert sind.

b) Es sei $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lokal lipschitzstetig mit

$$|g(x)| \leq \frac{|x|}{2},$$

wobei $|\cdot|$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$ bezeichne. Weiter sei $x : I \to \mathbb{R}^n$ mit $0 \in I$ eine maximale Lösung des autonomen Systems

$$x' = -x + g(x).$$

(1) Es sei $\varphi : I \to \mathbb{R}$ definiert durch $\varphi(t) := |x(t)|^2$. Zeigen Sie $\varphi'(t) \leq -\varphi(t)$ für jedes $t \in I$.

(2) Zeigen Sie: $I \supseteq [0, \infty)$ und $x(t) \to 0$ für $t \to \infty$.

Aufgabe 20: (F23T3A1)

a) Zeigen Sie, daß das Anfangswertproblem

$$x' = 2tx^2, \quad x(2) = -\frac{1}{3}$$

eine eindeutige maximale Lösung $\lambda : I \to \mathbb{R}$ besitzt, und bestimmen Sie diese.Geben Sie insbesondere auch ihr Definitionsintervall I an.

b) Wir betrachten auf dem $\mathbb{R}^2$ das System von Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} x' &= -4y^3 + 4y \\ y' &= 4x^3 - 4x. \end{aligned}$$

(1) Zeigen Sie, daß die Funktion $\begin{aligned} H : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto H(x, y) = x^4 - 2x^2 + y^4 - 2y^2 \end{aligned}$ eine Erhaltungsgröße des gegebenen Systems ist, dh. daß sie entlang jeder Lösungskurve konstant ist.

(2) Bestimmen Sie alle im abgeschlossenen ersten Quadranten liegenden stationären punkte des Systems und untersuchen Sie diese auf Stabilität.