Übungen zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 11: (F18T3A1)

a) Zeigen Sie, daß das uneigentliche Integral

$$I = \int_0^\infty \frac{\cos(x)}{x^2+1}dx$$

existiert.

b) Berechnen Sie I mithilfe des Residuensatzes. Geben Sie insbesondere Integrationspfade expilizit an und weisen Sie nach, daß die Werte der Kurvenintegrale gegen das entsprechende Integral konvergieren.

Aufgabe 12: (F16T3A2)

a) Zeigen Sie, daß $\begin{array}{rcl} [0,\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{1+x^3} \end{array}$ integrierbar ist.

b) Berechnen Sie $\int_0^\infty \frac{x}{1+x^3}dx$ unter Verwendung eines geschlossenen Weges, der durch 0, R und $Re^{\frac{2\pi i}{3}}$ geht.

Aufgabe 13: (F15T2A3)

a) Sei $K := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ und r eine reelle Zahl mit $r > e$. Zeigen Sie, daß die Gleichung

$$rze^z = 1$$

genau eine Lösung in K besitzt.
(Hinweis: Die Verwendung des Satzes von Rouché könnte hier hilfreich sein.)

b) Sei γ die positiv orientierte Kreislinie mit Mittelpunkt 0 und Radius 3. Definiere die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ durch die Wegintegrale

$$f(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)}dz, \quad t \in \mathbb{R}-$$

Zeigen Sie, daß f eine reellwertige $C^\infty-$Funktion auf $\mathbb{R}$ mit $f(0) = 0$ ist.

Aufgabe 14: (F16T2A1)
Begründen Sie, daß das uneigentliche Riemann-Integral

$$I := \int_{-\infty}^\infty \frac{2}{x^6+3}dx$$

existiert und berechnen Sie I mithilfe des Residuensatzes.

Aufgabe 15: (F15T2A2)
Sei $U := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,(z) > 0\}$

a) Zeigen Sie, daß

$$\mathrm{Log}(z+i) - \mathrm{Log}(z-i) = \mathrm{Log}\left(\frac{z+i}{z-i}\right)$$

für alle $z \in U$ gilt, wobei $\mathrm{Log} : \mathbb{C}\backslash\{x + i0 : x \in]-\infty, 0]\}$ der Hauptzweig des Logarithmus ist.

b) Für jedes $z \in U$ sei $[1, \frac{z}{2}]$ die gerade Strecke in $\mathbb{C}$ von 1 nach $\frac{z}{2}$. Definiere $f : U \to \mathbb{C}$ durch die Wegintegrale

$$f(z) := \int\limits_{[1,\frac{z}{2}]} \frac{1}{1+\xi^2} d\xi$$

Zeigen Sie:

$$f(z) = \frac{\pi}{4} + \frac{i}{2}\mathrm{Log}\left(\frac{z+2i}{z-2i}\right)$$

für alle $z \in U$.

Aufgabe 16: (H17T3A1) Es sei $\Omega := \mathbb{C}\backslash[-1,1] = \mathbb{C}\backslash\{z \in \mathbb{C} : -1 \leq \mathrm{Re}\,(z) \leq 1, \mathrm{Im}\,(z) = 0\}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

a) Auf Ω existiert keine holomorphe Logarithmusfunktion der Funktion $z \mapsto f(z) = \frac{1}{z^2-1}$, dh. es gibt keine holomorphe Funktion $g : \Omega \to \mathbb{C}$ mit $e^{g(z)} = f(z)$ für alle $z \in \Omega$.

b) Auf Ω existiert eine holomorphe Logarithmusfunktion der Funktion $z \mapsto h(z) = i\frac{z+1}{z-1}$, dh. es gibt eine holomorphe Funktion $w : \Omega \to \mathbb{C}$ mit $e^{w(z)} = h(z)$ für alle $z \in \Omega$.

Aufgabe 17: (H21T3A4)
Gegeben sei die Funktion $\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{x\sin(x)}{x^2+1} \end{aligned}$.

a) Zeigen Sie, daß der Limes $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_0^R f(x)dx$ existiert. Begründen Sie, daß f auf $\mathbb{R}$ uneigentlich Riemann-integrierbar ist.

b) Bestimmen Sie den Wert des Integrals $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ mit Hilfe des Residuensatzes.

Geben Sie insbesondere Integrationspfade explizit an und weisen Sie nach, daß die Werte der Kurvenintegrale gegen das entsprechende Integral konvergieren.