Übungen zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 1: (H10T1A5)

a) Formulieren Sie den Identitätssatz für holomorphe Funktionen.

b) Für $r > 0$ sei $D_r := \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$. Für welche r gibt es eine holomorphe Funktion $f : D_r \to \mathbb{C}$ mit $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n-1}$ für $n = 2, 3, 4, ...$?

Aufgabe 2: (H17T1A1)

a) Ist die Menge $A := \{z \in \mathbb{C} : |z| + \mathrm{Re}\,(z) \leq 1\}$ abgeschlossen in $\mathbb{C}$? Falls ja, bestimmen Sie, ob A kompakt ist.

b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{5n^2} z^n$$

c) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen. Es seien C^1-Funktionen $u : \Omega \to \mathbb{R}$ und $v : \Omega \to \mathbb{R}$ gegeben, die die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllen. Bestimmen Sie, ob die Funktionen $g(x, y) := e^{u(x,y)} \cos(v(x, y))$ und $h(x, y) = e^{u(x,y)} \sin(v(x, y))$ für $x + iy \in \Omega$ die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllen oder nicht.

Aufgabe 3: (H10T2A2)
Es sei $\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ die offene Einheitskreisscheibe und $f : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion für die $|f(0)| < 1$ und $|f(z)| \leq 1$ für alle $z \in \mathbb{E}$ gilt. Man zeige, daß dann sogar $|f(z)| < 1$ für alle $z \in \mathbb{E}$ gelten muß.

Aufgabe 4: (F12T1A2)
Drei Fragen zur Funktionentheorie:

a) Gibt es eine holomorphe Funktion $f : \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\} \to \mathbb{C}$, so daß $f(\frac{1}{2}) = 2$ ist und $|f(z)| = 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ gilt?

b) Gibt es eine holomorphe Funktion $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, so daß für alle $x + iy \in \mathbb{C}$ gilt: $(\mathrm{Im}\, g)(x + iy) = x^2 - y^2$?

c) Gibt es eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{C}$ von 0 und eine holomorphe Funktion $h : U \to \mathbb{C}$, so daß für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $h^{(n)}(0) = (-1)^n(2n)!$

Aufgabe 5: (H10T3A1)
Sei f eine in einer Umgebung von $\overline{D_2} := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2\}$ definierte holomorphe Funktion mit $|f(z)| \leq 1$ für alle $z \in \overline{D_2}$. Zeigen Sie: Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leq 1$ gilt: $|f''(z)| \leq 4$.
Hinweis: Cauchy-Integralformel

Aufgabe 6: (F11T3A4)

a) Sei $U := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$ und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$. Zeigen Sie, daß es ein $z \in U$ gibt mit $f(z) \in \mathbb{R}$ und $f(z) > 1$.

b) Bleibt die Aussage in (a) richtig, wenn man

   i) auf die Voraussetzung $f(0) = 0$ verzichtet, oder

   ii) U durch eine beliebige offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ mit $0 \in U$ und $1 \in U$ ersetzt?

Aufgabe 7: (H11T3A2)
Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $0 \in \Omega$, Untersuchen Sie, ob es holomorphe Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $g : \Omega \to \mathbb{C}$ und $h : \Omega \to \mathbb{C}$ mit den folgenden Eigenschaften gibt:

a) $f(\frac{1}{n^{2011}}) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n^{2011}} \in \Omega$ aber $f \not\equiv 0$.

b) $g^{(k)}(0) = (k!)^2$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$

c) $h(\frac{1}{2n}) = h(\frac{1}{2n-1}) = \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1} \in \Omega$.

Aufgabe 8: (H14T1A2)

a) Definieren Sie den Begriff der gleichmäßigen Konvergenz für Folgen und Reihen von komplexwertigen Funktionen auf einer Teilmenge von $\mathbb{C}$.

b) Es sei $\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ und $f : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ sei holomorph mit $f(0) = 0$.

   i) Zeigen Sie, daß die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f(z^n)$ auf jeder in $\mathbb{E}$ enthaltenen kompakten Menge gleichmäßig konvergiert.

   ii) Zeigen Sie, daß die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f(z^n)$ i.A. nicht gleichmäßig auf $\mathbb{E}$ konvergiert.

Aufgabe 9: (F17T3A1)
Es seien $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein Polynom sowie $\gamma_{r,w}$ der positiv orientierte Rand der Kreisscheibe mit Radius $r > 0$ um $w \in \mathbb{C}$. Beweisen Sie für das komplexe Wegintegral

$$\int_{\gamma_{r,w}} \overline{p(z)}dz = 2\pi i r^2 \overline{p'(w)}$$

Aufgabe 10: (H19T3A3)

a) Formulieren Sie den Satz von Liouville über ganze Funktionen.

b) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion. Zeigen Sie: Ist der Imaginärteil $\mathrm{Im}\,(f) : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ nach unten beschränkt, so ist f konstant.