Übungsblatt 9 zu Analysis und Lineare Algebra II (Physik)

Aufgabe 89: (15 Punkte)
Bestimme für die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

aus Aufgabe 85 und 86 je eine Jordan Normalform mit den zugehörigen Transformationsmatrizen.

Aufgabe 90: (15 Punkte)
Bestimme für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & -3 & 2 & -1 \\ -3 & -3 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

eine Jordan Normalform mit den zugehörigen Transformationsmatrizen.

Aufgabe 91: (10 Punkte) Es sei K ein endlicher Körper mit q Elementen.

a) Es seien $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k < n$ und U ein k-dimensionaler Untervektorraum von K^n und $B \in M((n-k) \times n, K)$ erfülle

$$U = \{\vec{u} = (u_1, ..., u_n) \in K^n : \text{ Für } \underline{u} := \vec{u}^T \text{ gilt } B\underline{u} = \underline{0}\} \tag{1}$$

Zeige:

$$\begin{aligned} w(U) &= \min\{r \in \mathbb{N} : \text{ Es gibt } r \text{ linear abhängige Spalten von } B\} \\ &= \max\{r \in \mathbb{N} : \text{ Je } (r-1)\text{-Spalten von } B \text{ sind linear unabhängig } \} \end{aligned}$$

ist das Minimalgewicht von U.

b) $d, n \in \mathbb{N}$ mit $2 \leq d \leq n \leq q$. Es seien $\vec{a} = (a_1, ..., a_n) \in K^n$ mit paarweise verschiedenen Einträgen, also $a_k \neq a_l$ für $1 \leq k < l \leq n$ und $\vec{v} = (v_1, ..., v_n) \in K^n$ mit $v_k \neq 0$ für alle $k = 1, ..., n$ vorgegeben. Definiere $B \in M((d-1) \times n, K)$ als

$$B := \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ a_1 v_1 & a_2 v_2 & \cdots & a_n v_n \\ a_1^2 v_1 & a_2^2 v_2 & \cdots & a_n^2 v_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{d-2} v_1 & a_2^{d-2} v_2 & \cdots & a_n^{d-2} v_n \end{pmatrix} \tag{2}$$

dann heißt

$$GRS_d(\vec{a}, \vec{v}) := \{\vec{x} \in K^n : \text{ Für } \underline{x} := (\vec{x})^T \text{ gilt } B\underline{x} = \underline{0}\} \tag{3}$$

ein verallgemeinerter Reed-Solomon Code. Zeige

$$d(GRS_d(\vec{a}, \vec{v})) = d$$

ist das Minimalgewicht von $GRS_d(\vec{a}, \vec{v})$, weshalb $GRS_d(\vec{a}, \vec{v})$ ein $d-1$ fehlererkennender und t- fehlerkorrigierender Code für $t \in \mathbb{N}$, $t \leq \frac{d-1}{2}$ ist.

Abgabe in Zweier- oder Dreiergruppen bis Mittwoch 28.6.2023 16 Uhr über Moodle