Übungsblatt 8 zu Analysis und Lineare Algebra II (Physik)

Aufgabe 84: (10 Punkte)
Entscheide, ob die $\mathbb{R}-$linearen Abbildungen $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, die bezüglich der Standardbasis die darstellenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

haben, eine Schursche Normalform besitzen und gib diese gegebenenfalls an.

Aufgabe 85: (10 Punkte)
Bestimme für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{C})$$

alle Eigenwerte, Eigenräume, verallgemeinerten Eigenräume und Haupträume.

Aufgabe 86: (10 Punkte) Bestimme für

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

alle Eigenwerte, Eigenräume, verallgemeinerten Eigenräume und Haupträume.

Aufgabe 87: (10 Punkte)
Es sei K ein endlicher Körper, $n \in \mathbb{N}$, dann heißt ein Untervektorraum $C \subseteq K^n$ ein **linearer Blockcode** der Länge n.

a) Zeige: Durch

$$\begin{aligned} d : K^n \times K^n &\to [0, \infty[\\ ((u_1, ..., u_n), (v_1, ..., v_n)) &\to \mathrm{Kard}\{j \in \{1, ..., n\} : u_j \neq v_j\} \end{aligned}$$

wird eine Metrik auf K^n definiert.

Es sei $t \in \mathbb{N}$ und $C \subseteq K^n$ ein linearer Blockcode.

- C heißt **t-fehlererkennend**, wenn für jedes $\vec{u} \in C$ die Kugel $\overline{K}_t(\vec{u}) := \{\vec{v} \in K^n : d(\vec{u}, \vec{v}) \leq t\}$ außer $\vec{u}$ kein weiteres Element $\vec{v} \in C$ enthält.
- C heißt **t-fehlerkorrigierend**, wenn $\overline{K}_t(\vec{u}) \cap \overline{K}_t(\vec{v}) = \emptyset$ für alle $\vec{u}, \vec{v} \in C$ mit $\vec{u} \neq \vec{v}$ gilt.
- Ist $\mathrm{Kard}(C) > 1$, so heißt

  $$d(C) := \min\{d(\vec{u}, \vec{v}) : \vec{u}, \vec{v} \in C, \vec{u} \neq \vec{v}\} \tag{1}$$

  die **Minimaldistanz** von C und

  $$w(C) = \min\{d(\vec{u}, \vec{0}) : \vec{u} \in C \backslash \{\vec{0}\}\} \tag{2}$$

  das **Minimalgewicht** von C.

Es sei $C \subseteq K^n$ ein linearer Blockcode. Zeige:

b) $d(C) = w(C)$.

c) Ist $d(C) \geq t + 1$, so ist C t-fehlererkennend.

d) Ist $d(C) \geq 2t + 1$, so ist C t-fehlerkorrigierend.

Abgabe in Zweier- oder Dreiergruppen bis Mittwoch 21.6.2023 16 Uhr über Moodle