Übungsblatt 7 zu Analysis und Lineare Algebra II (Physik)

Aufgabe 80: (10 Punkte)

Es sei K ein Körper. Für eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(K)$ ist $\mathrm{Spur}(A)$ als

$$\mathrm{Spur}(A) := a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}$$

definiert. Zeige: Ist $T \in GL(n, K)$ eine invertierbare Matrix, dann gilt

$$\mathrm{Spur}(A) = \mathrm{Spur}(TAT^{-1})$$

Aufgabe 81: (10 Punkte)
Entscheide, welche der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

diagonalisierbar ist und gib gegebenenfalls eine Basis von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren an.

Aufgabe 82: (10 Punkte) Es sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

a) Entscheide, ob es für die $\mathbb{C}-$lineare Abbildung $F_A : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^3 & \to & \mathbb{C}^3 \\ \underline{x} & \mapsto & A\underline{x} \end{array}$ eine Basis des $\mathbb{C}^3$ aus Eigenvektoren von F_A gibt und gib diese gegebenenfalls an.

b) Entscheide, ob es für die $\mathbb{R}-$lineare Abbildung $f_A : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \underline{x} & \mapsto & A\underline{x} \end{array}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von f_A gibt und gib diese gegebenenfalls an.

Aufgabe 83: (10 Punkte)
Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, x_2, ..., x_n \in K$. Zeige durch Induktion, daß

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$

Abgabe in Zweier- oder Dreiergruppen bis Mittwoch 14.6.2023 16 Uhr über Moodle