Übungsblatt 5 zu Analysis und Lineare Algebra II (Physik)

Aufgabe 73: (10 Punkte)
Es sei $n = 2l \in \mathbb{N}$ eine gerade Zahl und $A_n = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(\mathbb{C})$ gegeben durch

$$a_{ij} := \begin{cases} 0 & \text{für } i+j \notin 3\mathbb{N} \\ \dfrac{i+j}{3} & \text{für } i+j \in 3\mathbb{N} \end{cases}$$

a) Schreibe $A_2, A_4, A_6, A_8, A_{10}$ explizit aus.

b) Berechne $\mathrm{Rang}(A_n)$ für alle $n \in 2\mathbb{N}$.

c) Für welche $n \in 2\mathbb{N}$ gibt es $\underline{b} \in \mathbb{C}^n$, so daß $A_n\underline{x} = \underline{b}$ eine eindeutige Lösung besitzt? Bestimme in diesem Fall alle möglichen $\underline{b}$.

Aufgabe 74: (10 Punkte)
Gegegeben seien die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 & -2 \\ -2 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 2 & -4 & -6 & -2 \\ -1 & -2 & 6 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimme den Lösungsraum $\mathrm{Lös}(A, \underline{0}) \subseteq \mathbb{R}^5$ des homogenen linearen Gleichungssystem

$$A\underline{x} = \underline{0}.$$

b) Bestimme für welche $\underline{b} \in \mathbb{R}^3$ das inhomogene System

$$B\underline{x} = \underline{b}$$

eine Lösung $\underline{x} \in \mathbb{R}^4$ hat und gib $\mathrm{Lös}(B, \underline{b}) \subseteq \mathbb{R}^4$ jeweils an.

c) Bestimme für welche $\xi \in \mathbb{C}$ das inhomogene Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + ix_2 + 3x_3 &= 1 \\ 2ix_2 + 4x_2 + 6\xi x_3 &= 8i \\ x_1 + i3\xi x_3 &= 2 \end{aligned}$$

eine eindeutige Lösung hat und gib diese an.

Aufgabe 75: (20 Punkte)
Eine relle 3×3-Matrix heißt magisches Quadrat, wenn die Summen aus den Einträge in Zeilen, Spalten und Diagonalen einander gleich sind. Es sei $\mathcal{M}$ die Menge aller magischen Quadrate und $\mathcal{M}(\lambda)$ die Menge aller magischen Quadrate mit Zeilensumme λ.

a) Zeige, dass $\mathcal{M}(0)$ und $\mathcal{M}$ Untervektorräume von $M(3 \times 3, \mathbb{R})$ sind.

b) Zeige, dass man jede vorgegebene erste Zeile $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ auf genau eine Weise zu einem magischen Quadrat ergänzen kann und bestimme damit eine Basis von $\mathcal{M}$ und von $\mathcal{M}(0)$.

c) Wie sieht "das" magische Quadrat aus, das nur die Zahlen $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ enthält?

Abgabe in Zweier- oder Dreiergruppen bis Mittwoch 24.5.2023 16 Uhr über Moodle