Übungsblatt 4 zu Analysis und Lineare Algebra II (Physik)

Aufgabe 69: (10 Punkte)

a) Es sei V ein $n-$dimensionaler $K-$Vektorraum mit Basen $\mathcal{A}$ und $\widetilde{\mathcal{A}}$. Zeige:

$$\left(M_{\mathcal{A}}^{\widetilde{\mathcal{A}}}(\mathrm{id_V})\right)^{-1} = M_{\widetilde{\mathcal{A}}}^{\mathcal{A}}(\mathrm{id_V}).$$

b) Benutze a) um zu zeigen, daß

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist um A^{-1} zu berechnen.

Aufgabe 70: (10 Punkte)

Es sei $A := \begin{pmatrix} -1 & -5 & 2 \\ 1 & 3-1 & \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{array}{rcl} F_A : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \underline{x} & \mapsto & A\underline{x} \end{array}$, κ_3 die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ und

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

a) Zeige, daß $\mathcal{B}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Berechne die darstellende Matrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F_A)$ durch Ausrechnen der Spaltenvektoren.

c) Berechne die darstellende Matrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F_A)$ durch Verwendung von $A = M_{\kappa_3}^{\kappa_3}(F_A)$.

Aufgabe 71: (10 Punkte) Es sei $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $\|\cdot\|_{1,1}$ die Norm auf $M_n(\mathbb{K})$ aus Aufgabe 68.

a) Zeige, daß für jedes $A \in M_n(\mathbb{K})$ die Folge $\left(\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}A^k\right)_{m\in\mathbb{N}_0}$ eine Cauchyfolge in $(M_n(\mathbb{K}), \|\cdot\|_{1,1})$ ist.

b) $(M_n(\mathbb{K}), \|\cdot\|_{1,1})$ ist vollständig – das werden wir später als Spezialfall eines anderen Satzes erhalten. Wir setzen

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{A^k}{k!}.$$

Berechne e^A für $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 72: (10 Punkte)

a) Zeige, daß sich der Rang einer Matrix $A \in M(m \times n, K)$ dadurch bestimmen läßt, daß man A durch elementare Zeilenumformungen in eine Zeilenstufenform B überführt, dann ist $\mathrm{Rang}(A) = r =$ Anzahl der Zeilenvektoren von B, die nicht $\vec{0}$ sind.

b) Bestimme den Rang von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Abgabe in Zweier- oder Dreiergruppen bis Mittwoch 17.5.2023 16 Uhr über Moodle