Übungsblatt 3 zu Analysis und Lineare Algebra II (Physik)

Aufgabe 65: (10 Punkte)
Es seien $m, n \in \mathbb{N}$. Entscheide, ob es eine $K-$lineare Abbildung $F : V \to W$ gibt mit

a) $V = K^n$, $W = K^m$, $n > m$ und F injektiv.

b) $V = K^n$, $W = K^m$, $n > m$ und F surjektiv.

c) $W = \mathcal{P} := \{p : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : p \text{ ist ein Polynom }\}$, $V = \mathcal{P}_n := \{p \in \mathcal{P} : p \text{ hat Grad } \leq n\}$ und F surjektiv.

d) $W = \mathcal{P} := \{p : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : p \text{ ist ein Polynom }\}$, $V = \mathcal{P}_n := \{p \in \mathcal{P} : p \text{ hat Grad } \leq n\}$ und F injektiv.

und gib im Existenzfall neben den Bedingungen an Kern(F) und $F(V)$ ein Beispiel an.

Aufgabe 66: (10 Punkte)
Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{P}_n := \{p : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : p \text{ ist ein Polynom vom Grad } \leq n\}$.

a) Zeige, daß

$$\begin{aligned} F_n : \mathcal{P}_n &\to \mathcal{P}_{2n} \\ \sum_{k=0}^{n} a_k X^k &\mapsto \sum_{k=0}^{n} k a_k X^{2k} \end{aligned}$$

eine $\mathbb{C}-$lineare Funktion ist.

b) Für gerades $n = 2k \in \mathbb{N}$ seien $L_1, ..., L_{2k+1}$ die Lagrangeschen Interpolationspolynome aus Aufgabe 62 zu den Stellen $x_1 = -k, x_2 = -k+1, ..., x_k = -1, x_{k+1} = 0, x_{k+2} = 1, ...,$ und $x_{2k+1} = k$, also gilt für $z \in \mathbb{C}$ und $i \in \{1, ..., 2k+1\}$

$$L_i(z) := \prod_{\substack{j=1, \\ i \neq j}}^{2k+1} \frac{z - x_j}{x_i - x_j}$$

Berechne explizit die Basen $(L_1, ..., L_5)$ von $\mathcal{P}_4$.

c) Es seien $\begin{aligned} \tau_0 : \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto 1 \end{aligned}$,..., $\begin{aligned} \tau_8 : \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto z^8 \end{aligned}$ die Monome wie in Beispiel 7.1.5. Berechne die darstellende Matrix $M^{(L_1,...,L_5)}_{(\tau_0,...,\tau_8)}(F_4)$ von F_4 bezüglich der Basen $(L_1, ..., L_5)$ und $(\tau_0, ..., \tau_8)$.

Aufgabe 67: (10 Punkte)

a) Zeige, daß $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Es sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die $\mathbb{R}-$lineare Abbildung, die bezüglich der Standardbasis durch die darstellende Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ gegeben ist. Berechne die darstellende Matrix $B = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F)$ von F bezüglich $\mathcal{B}$.

Aufgabe 68: (10 Punkte) Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_1 : \mathbb{K}^n &\to [0, \infty[\\ \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &\mapsto \sum_{j=1}^{n} |x_j| \end{aligned}$$

die $\|\cdot\|_1$ Norm auf $\mathbb{K}^n$ und definieren für $m, n \in \mathbb{N}$ die Abbildung

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{1,1} : M(m \times n, \mathbb{K}) &\to [0, \infty[\\ A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} &\mapsto \|A\|_{1,1} := \sum_{i=1}^{m} \max_{j=1,..,n} |a_{ij}| \end{aligned} .$$

Beweise folgende Aussagen:

(a) $\|\cdot\|_{1,1}$ macht $M(m \times n, \mathbb{K})$ zu einem normierten $\mathbb{K}-$Vektorraum.

(b) Für alle $\underline{x} \in \mathbb{K}^n$ und $A \in M(m \times n, \mathbb{K})$ gilt: $\|A\underline{x}\|_1 \leq \|A\|_{1,1} \|\underline{x}\|_1$.

Abgabe in Zweier- oder Dreiergruppen bis Mittwoch 10.5.2023 16 Uhr über Moodle