Übungsblatt 2 zu Analysis und Lineare Algebra II (Physik)

Aufgabe 61: (10 Punkte)
Es sei $V := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ ist Funktion}\}$. Betrachte für $k \in \mathbb{Z}$ die Funktion

$$\begin{aligned} f_k : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}\backslash[2k, 2(k+1)] \\ (x-2k)(2(k+1)-x) & \text{für } x \in [2k, 2(k+1)] \end{cases} \end{aligned}$$

Zeige: $\{f_k : k \in \mathbb{Z}\} \subseteq V$ ist linear unabhängig und $\operatorname{lin}(\{f_k : k \in \mathbb{Z}\}) \neq V$.

Aufgabe 62: (10 Punkte)
Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ sei

$$\mathcal{P}_n := \left\{ \begin{array}{rcl} p : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & p(x) := a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0 \end{array} : a_0, ..., a_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $(x_1, f_1), ..., (x_n, f_n) \in \mathbb{R}^2$ mit $x_i \neq x_j$ für $i, j \in \{1, ..., n\}$ mit $i \neq j$. Für $1 \leq i \leq n$ definiere $L_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$L_i(x) := \prod_{\substack{j=1, \\ i \neq j}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Zeige

a) $\big(L_1, ..., L_n\big)$ bildet eine Basis von $\mathcal{P}_{n-1}$.

b) Es gibt eine eindeutige Polynomfunktion $p \in \mathcal{P}_{n-1}$ (das sog. **Interpolationspolynom**), sodass $p(x_1) = f_1, ..., p(x_n) = f_n$ ist.

c) Betrachte die Punkte $(-\pi, -1)$, $(-\frac{\pi}{2}, 0)$, $(0, 1)$, $(\frac{\pi}{2}, 0)$, und $(\pi, -1)$ und berechne das zu diesen Punkten gehörige Interpolationspolynom p. Zeichne dieses Interpolationspolynom und die reelle Cosinusfunktion im Bereich $[-2\pi, 2\pi]$.

Aufgabe 63: (10 Punkte)
Es sei V ein $K-$Vektorraum und $W \subseteq V$ ein Untervektorraum.

a) Unter welchen Bedingungen an W gibt es eine $K-$lineare Abbildung $f : V \to K$ mit $\operatorname{Kern}(f) = W$?

b) Es sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl und $K = \mathbb{Z}/(p\mathbb{Z})$ und W erfülle die Bedingung aus (a). Wie viele lineare Abbildungen $f : V \to \mathbb{Z}/(p\mathbb{Z})$ mit $\operatorname{Kern}(f) = W$ gibt es?

Aufgabe 64: (10 Punkte) Es sei V ein K-Vektorraum und $U_1, U_2, U_3 \subset V$ Untervektorräume. Zeige:

a) $(U_1 \cap U_3) + (U_2 \cap U_3) \subseteq (U_1 + U_2) \cap U_3$.

b) Ist $U_1 \subseteq U_3$, so gilt $(U_1 \cap U_3) + (U_2 \cap U_3) = (U_1 + U_2) \cap U_3$.

c) Zeige an einem Beispiel, daß in a) im allgemeinen keine Gleichheit gilt.

Abgabe in Zweier- oder Dreiergruppen bis Mittwoch 3.5.2023 16 Uhr über Moodle